SELECTIVIDAD

Problemas de FISICA

de las Pruebas de Aptitud Para el Acceso a la Universidad de Cádiz

Didácticamente Resueltos

Christian WAGNER
Victor GARCIA

Instituto de Ciencias de la Educación
UNIVERSIDAD DE CADIZ

Christian Wagner
y
Victor García

PROBLEMAS DE FISICA

de las Pruebas de Aptitud para el acceso a la Universidad de Cádiz

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE CADIZ

I.S.B.N.: 84 / 7786 / 022 / x
D.L.: CA / 021 - 90

Fotomecánica, Fotocomposición e Impresión:
Industrias Gráficas **LIPPER** S.A.
C/ Tajo 21, CHICLANA

Problemas de FISICA

de las Pruebas
de Aptitud Para el
Acceso a la Universidad
de Cádiz

Didácticamente Resueltos

Christian WAGNER
Victor GARCIA

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE CADIZ

A nuestros alumnos;

que con sus preguntas, dudas

errores y sugerencias, nos

impulsarón a escribir este libro.

INDICE GENERAL

PRESENTACIÓN 9

NOTAS SOBRE EL ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS DE FÍSICA . . 11

PROBLEMAS RESUELTOS. 25

1. Dinámica de traslación 27

2. Dinámica de rotación 55

3. Movimiento ondulatorio 86

4. Campo gravitatorio. 92

5. Campo eléctrico (I) 100

7. Campo eléctrico (II) 115

8. Campo magnético. 123

9. Fuerzas magnéticas. 130

10. Introducción al estudio de la corriente alterna . 142

11. Corriente alterna 148

PRUEBAS POR ORDEN CRONOLÓGICO 151

PROGRAMA DE FÍSICA 185

CUESTIONES ORDENADAS TEMÁTICAMENTE. 190

PRESENTACION

El presente trabajo resuelve didácticamente los problemas de Física de las "Pruebas de Aptitud para el Acceso a la Universidad" de la Universidad de Cádiz, desde la creación de ésta hasta la pasada convocatoria del mes de septiembre de 1989.

La prueba de Física se ha ido modificando en un intento de evaluar mejor a los alumnos. En todas ellas, el alumno debía elegir entre una de las dos opciones o ejercicios presentados.(Inicialmente se denominaban ejercicios 1 y 2 y finalmente, opciones A y B. En este trabajo se citan como opciones 1ª y 2ª). Ambas opciones constan de problemas y cuestiones cuyo número ha ido variando. Recientemente ha aumentado la duración de la prueba a una hora y media, y en la última convocatoria, cada opción constaba de dos problemas y de tres cuestiones de las que el alumno debía responder solamente a dos. Para una información detallada sobre "Las pruebas de Aptitud para el Acceso a la Universidad", nos remitimos al libro de este título publicado por el I.C.E. de la Universidad de Cádiz.

Esta colección de problemas se ha ordenado temáticamente, siguiendo el actual programa de Física para el Curso de Orientación Universitaria, publicado por el I.C.E. de la Universidad de Cádiz e incluído en este libro. Como este programa ha sufrido diferentes modificaciones, tres problemas se han incluído al principio de temas afines; uno de "Cinemática" en el tema "Dinámica de traslación" y dos de "Corriente continua" en "Introducción a la corriente alterna". Aunque estos dos temas no estén ya explícitamente incluidos en el programa, su conocimiento sí es necesario para el desarrollo del programa actual y de sus problemas.

Al presentar esta colección de problemas resueltos se ha tratado de mostrar y discutir las estrategias seguidas para resolver los problemas, de modo que el alumno aprenda a resolver por sí mismo los problemas de Física a la vez que profundiza en los conceptos y leyes fundamentales de la Física. Por ello, se han empleado métodos diferentes para resolver un mismo problema, partiendo de las leyes fundamentales y obteniendo las expresiones particulares cuando se necesitan, aunque resulte repetitivo. El alumno ha de hacer esto mismo a fin de adquirir la destreza suficiente para poder obtener con rapidez y seguridad estas expresiones particulares y no tener que memorizarlas. Se ha utilizado siempre el S.I. de unidades, por lo que inicialmente se convierten los datos a este sistema, si es necesario, y ya no hay que preocuparse de las unidades pues los resultados estarán en las correspondientes unidades del S.I.. Por ello no se indican las unidades en los cálculos y resultados intermedios, salvo cuando esto tiene un especial interés. Hay que tener cierta flexibilidad en las notaciones, pero deben indicarse claramente para que la solución del problema sea inteligible, y la forma de la respuesta ha de estar conforme con el enunciado. Nosotros hemos utilizado diferentes presentaciones y notaciones para cada problema, adaptándonos a las del enunciado.

La resolución de cada problema es completa en sí misma sin necesidad de consultar las de otros problemas, aunque a veces se comparan las soluciones de diferentes problemas. Se ha tratado de insistir en los aspectos más significativos de cada problema, tratando de compaginar la precisión y la profundización con la sencillez y la claridad. No se trata simplemente de dar las soluciones de los problemas sino de enseñar a llegar a ellas.

Como uno de los aspectos más difíciles para el alumno es la comprensión e interpretación de los enunciados, se ha insistido en este aspecto, desarrollando algunos problemas siguiendo sus diferentes interpretaciones. Por ello, también se han transcrito los enunciados tal cual, respetando su redacción e incluso algunas erratas y olvidos.

Agradecemos al I.C.E. y al Servicio de Publicaciones su ayuda y colaboración para hacer posible la publicación de este trabajo. Así mismo, agradecemos por anticipado todas las correcciones y sugerencias sobre este trabajo, así como una posible prueba no incluida. Pueden enviarse a Christian Wagner, Acacias 15 Dpdo, 11007 CADIZ.

NOTAS SOBRE EL ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS DE FISICA

1. EL PROBLEMA DE LOS PROBLEMAS DE FÍSICA.

Para muchos alumnos, los problemas de Física más que algo a resolver partiendo de sus conocimientos y de las destrezas adquiridas, son algo más que aprender, memorizar. Usualmente se quejan de que no se han hecho suficientes problemas, o más exactamente, que no se han hecho problemas muy parecidos a los del escrito.

Los alumnos tratan de resolver los problemas de la forma lo más parecida posible a como se resolvían los problemas en clase o en el libro que estudiaron. Esta puede ser una buena metodología si se emplea adecuadamente. Pero al resolverse un determinado problema, muchos alumnos no comprenden por qué se aplican esas leyes y en esa forma, sino que se limitan a "copiar el problema" de una manera formal y burda, sin reflexionar sobre lo que hacen.

Un problema suele presentar al alumno una amplia gama de dificultades. Unas son inherentes a los CONCEPTOS Y LEYES DE LA FISICA, dependiendo de como se ha estudiado y a su nivel de profundización. Si el alumno se limita,prácticamente,a retener una serie de definiciones y enunciados entrelazados por complejos cálculos matemáticos, los problemas de Física serán algo más a retener en este galimatías incomprensible. Por el contrario, una enseñanza de la Física basada en actividades de búsqueda, investigación, comprensión y profundización,iniciará al alumno en el quehacer de las ciencias, del método científico a la vez que le capacita para enfrentarse con situaciones nuevas, como las planteadas en los problemas.

La dificultad de un problema puede estribar en;

* El número de leyes o definiciones que hay que aplicar
* Si las leyes implicadas en la resolución de un problema se han explicado en temas distintos, suele ser más dificil que el alumno las relacione.
* La importancia dada a dichas leyes, su profundización mediante ejercicios, así como el tiempo que hace que se estudiaron o aplicaron.

* La dificultad de comprensión de la propia ley y la complejidad matemática de su formulación.
* Si el problema se refiere a leyes fundamentales, a aspectos secundarios de una teoría,o a excepciones.
* Si la forma en la que se aplica la ley es habitual o nueva para el alumno.
* Si en el problema se introducen elementos o aspectos nuevos.
* La sencillez del problema planteado, es decir, el número de aspectos, conceptos y leyes a tener en cuenta.

Otras dificultades son inherentes al NIVEL MATEMATICO NECESARIO. Desafortunadamente, el desarrollo de la Física suele ir por delante del propio curriculum de Matemáticas del alumno. Esta dificultad es , a veces, difícil de superar. Pero en otras ocasiones es el nivel personal del alumno el que falla. Pensemos en alumnos con asignaturas de Matemáticas pendientes y en los que aprobaron a lo justo. Una cosa es que un alumno supere unos conocimientos mínimos y sea capaz de realizar algunos cálculos, y otra cosa es que tenga la destreza y la seguridad necesaria para que esos cálculos no le supongan una dificultad más.

El inicio de la resolución de un problema comienza por la COMPRENSION DEL ENUNCIADO. Algunos conceptos pueden ser de difícil comprensión para el alumno, pero aunque comprenda todas las palabras e incluso las frases, puede ser que no capte el enunciado del problema. Imaginar,"ver",los hechos que el problema presenta, darse cuenta claramente de la situación planteada, de las variables que la definen, de los datos aportados y de lo que el enunciado pide exactamente.

Los problemas de la Física se refieren a hechos reales, y el alumno ha de ser capaz de captar estos fenómenos, imaginarlos y representarlos esquemáticamente. Algunos alumnos encuentran dificultades para realizar un esquema sencillo, detallado y preciso de la situación. No es que no sepan dibujar, sino que más bien les falta imaginación y precisión para hacer un esquema detallado y preciso. La resolución de un problema de Física no ha de ser nunca una abstracción conceptual o matemática, sino una situación real, física, tangible o imaginable;y sobre todo, representable y esquematizable. Si es necesario, debe acudirse a la realización experimental del problema planteado y a su simulación gráfica por ordenador.

Aunque se superen las anteriores dificultades, se ha de trazar un puente que partiendo de una situación conocida nos lleve a una situación nueva, a la resolución del problema. A veces el puente es demasiado largo para el alumno o no sabe como situar los pilares que dividan este salto en otros más pequeños. El alumno no sabe que hacer, que camino seguir o que estrategia elegir y se siente desamparado.Son estas dificultades INHERENTES A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS, las que a veces hacen que el alumno abandone.

Una vez planteadas las ecuaciones y resueltos los cálculos,queda una última dificultad, hay que INTERPRETAR LOS RESULTADOS. Hay que saber si esta solución es posible y está de acuerdo con el enunciado y a veces, discernir entre las diferentes soluciones numéricas. Es el momento de revisar el problema y comprobar los cálculos y de escribir la respuesta claramente y de acuerdo con el contexto y la forma del enunciado. Por fin se ha resuelto el problema o si el resultado no es adecuado,hay que buscar nuevos caminos.

2. EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Un problema es una situación nueva que el alumno ha de resolver partiendo de los conocimientos y destrezas que posee. Al principio al menos, un problema es algo cuya solución no sólo se desconoce sino que tampoco se sabe como llegar a ella. Un problema se presenta como un enigma, algo incierto, desconcertante que no se sabe como resolver.

No todos los "problemas" planteados en un libro son realmente problemas, muchos son meros ejercicios. El ejercicio podría definirse como una aplicación directa de los conocimientos que el alumno posee. Si los ejercicios estan bien planteados,el alumno sabrá como resolverlos aunque le presenten algunas dificultades; no son algo nuevo, desconcertante. Pero si los ejercicios no están bien programados o planteados, o el alumno no posee los conocimientos ni las destrezas requeridas, un sencillo ejercicio puede convertirse en un auténtico problema para el alumno. Por el contrario, si el alumno ya ha resuelto un problema similar, si ya conoce las estrategias a seguir, el problema se convierte en un ejercicio. Pero el alumno debe ser cauto, una ligera variación en el enunciado o un pequeño cambio en los datos puede originar un cambio cualitativo en el problema y hasta puede ser necesario emplear un tipo de estrategia distinto.

En algunos libros, se incluye en el texto como una pregunta de teoría más, la resolución general de algunos problemas. No creemos conveniente la utilización de estas fórmulas particulares para resolver un problema concreto sino que es preferible seguir todo el camino, particularizandolo para este caso . Es muy importante partir de las leyes básicas de la Física y no de expresiones más elaboradas o particularizadas que sumergen al alumno en un mar de fórmulas convirtiendo la Física en una memorización de fórmulas y su aplicación formal.

Establecer una separación clara entre ejercicios y problemas no sólo no es posible ya que depende de cada alumno, sino que no lo juzgamos conveniente al principio,pues los saltos deben ser muy pequeños para que el alumno no se eche atrás. El alumno solo aprenderá a resolver problemas cuando esté decidido a hacerlo, cuando se crea capaz de dar estos saltos y por ello los primeros obstáculos no deben ser muy altos.

3. COMPRENDER LA "TEORÍA".

Antes de tratar de resolver un problema el alumno debe poseer los conocimientos y destrezas necesarios para ello. Las dificultades presentadas por muchos de nuestros alumnos en la resolución de los problemas de Física denotan una falta de asimilación de los conceptos y leyes y a veces,un fallo en la enseñanza o en el aprendizaje de la Física. Decimos frecuentemene que no es suficiente que el alumno sepa las definiciones y leyes de la Física, sino que es necesario que las comprenda. Aunque sería difícil precisar lo que se entiende por comprender, podemos decir que un alumno comprende una definición, una ley física, cuando conoce el significado de sus términos, sabe relacionarla con otros conocimientos anteriores y puede aplicarla a casos sen cillos. Por ello, antes de tratar de resolver un problema, no sólo deben conocerse las leyes que pueden implicar sino que hay que saberlas aplicar correctamente mediante la ejecución de ejercicios graduados.

Hay un fenómeno de retroalimentación; la comprensión de las leyes de la Física facilita la resolución de problemas y esto va llevando a una profundización en las leyes de la Física. Por ello, muchas de las dificultades que encuentran nuestros alumnos al resolver los problemas son intrínsecas a la enseñanza de la Física y nos advierten de sus dificultades en comprenderla.

Es absurdo tratar de resolver los problemas correspondientes a un tema,antes de estudiarlo detenidamente. Al tratar de resolver los problemas tendrá que revisar aspectos de dicho tema y frecuentemente de temas anteriores. La "teoría" y los "problemas" hay que estudiarlos conjunta y progresivamente. Conviene recordar una norma básica del buen estudiante; lo antes posible después de cada clase y siempre antes de la próxima clase de dicha asignatura, el alumno ha de estudiar lo explicado en dicha clase, tratando de comprender y precisar los nuevos conceptos y leyes, destacando las ideas claves y anotando las dificultades para una próxima consulta. Esta es la forma de que la próxima clase sea comprensible. Si el alumno va acumulando en sus notas explicaciones cada vez mas confusas,dificilmente podrá preparar satisfactoriamente la próxima prueba unos dias antes. El éxito puede no acompañar su esfuerzo porque no estudió de la manera adecuada.

4. COMPRENDER EL ENUNCIADO.

El enunciado ha de plantear un problema y el alumno ha de verlo con nitidez. Debe comenzar por leer el enunciado despacio, un par de veces, venciendo frecuentemente la tentación de comenzar a resolverlo. Aunque al leer el enunciado el alumno crea reconocer un problema que ya resolvió,debe frenar su impaciencia y leer y releer el enunciado detenidamente.

La mayor parte de los problemas de Física se refieren a situaciones o montajes que pueden ser representados esquemáticamente. No se trata de realizar una obra de arte sino de expresar en un sencillo dibujo las situaciones o sucesos planteados en el enunciado de modo que ayude a ver, imaginar y precisar el proble ma planteado. Este dibujo ha de ser claro y preciso y el alumno debe acostumbrarse a realizarlo con regla y compás. En algunos casos puede ser adecuado exagerar un poco algunos aspectos del problema; si hay dos cuerpos de masas ligeramente diferente, el dibujo debe mostrar claramente cual es la mayor. En el caso de ángulos suele ser convenientes dibujarlos pequeños (de unos 10 ó 15 grados) si son menores de 45 grados y casi rectos, los mayores de 45 y menores de noventa grados. De esta forma hay menos confusiones al considerar la igualdad de dos ángulos,... En resumen, es útil caricaturizar el esquema exagerando las diferencias a fin de destacarlas.

Conviene nombrar en la figura los diferentes elementos o variables involucrados en el problema aunque no se nombren en el enunciado. Junto a la figura puede escribirse una tabla de variables en la que se escribirán los datos conocidos y aquellos valores que se vayan calculando. Los valores de los datos pueden tambien incluirse en la figura. En ambos casos los datos se escribirán en un mismo sistema de unidades que preferiblemente será el S.I.. El alumno puede ya despreocuparse de las unidades, pues las unidades de las respuestas serán las correspondientes en dicho sistema.

Ahora conviene leer nuevamente el enunciado y con el dibujo delante se tratará de imaginar con nitidez la situación recogida en el enunciado y plasmada en el esquema o dibujo.

Algunos problemas pueden ser genéricos, no hay datos númericos. Aunque se den datos numéricos, la respuesta puede depender de un parámetro, de un dato supuesto pero no dado. A veces los datos de un problema están como escondidos en el texto y para explicitarlos ha de saber interpretarlos. Por ejemplo, si en un problema de proyectiles se refiere al punto más alto de la trayectoria esto equivale a decir que la componente vertical de la velocidad en ese punto se anula.

Es usual que los problemas no estén completamente detallados, suponiendose que tal dato o efecto es despreciable (masa de una polea o de una cuerda, rozamiento,...) aunque no se afirme ni se niegue en el enunciado. En este caso conviene explicitarlo al comenzar el problema y comprobar posteriormente si el resultado es compatible con nuestras suposiciones e interpretaciones iniciales.

5. RESOLVIENDO EL PROBLEMA.

Una vez que el alumno ha sido capaz de concretar el problema, representando y esquematizando la situación, debe leer nuevamente el enunciado a fin de precisar el problema, lo que ha de descubrir. Para ello habrá de utilizar las leyes de la Física, posiblemente las que acaba de estudiar, pero tambien las que estudió hace algún tiempo, o incluso, en cursos pasados.

¿Como dar el salto?, ¿Cómo elegir las leyes que entran en juego?. Si la solución es casi inmediata, si una sola ley nos permite resolver el problema, muy probablemente el problema se resuelve fácilmente, se trata más bien de un ejercicio. Pero si hay que aplicar varias leyes, algunas quizás casi olvidadas; si hay que considerar diferentes aspectos y momentos en el problema; elegir ahora las leyes adecuadas y su secuencia de aplicación resulta mucho más dificil. El alumno puede recordar como resolvió problemas o situaciones similares y la estrategia que siguió, así como las leyes de la Física relativas a los aspectos del problema y como se aplican éstas. Bueno, pero ahora, ¿cómo se continúa?

Hay alumnos que casi nunca resuelven los problemas que se les proponen. Cuando al leerlos les parecen sencillos, creen que no vale la pena gastar tiempo en resolverlos. Por el contrario, si al leer el problema la primera vez no lo entienden, no ven inmediatamente como solucionarlos, no se sienten capacitados para resolverlos y piensan que es inútil gastar tiempo en intentarlo. Ya se enterará mañana de la solución cuando el profesor lo explique en clase, o si el problema viene resuelto en el libro, leerá inmediatamente la solución.

Un buen número de alumnos, al ser requeridos por qué no hicieron los problemas propuestos, responden "por que no sabían hacerlos", "por que no sabían como comenzar". En algunos casos puede tratarse de una auténtica IMPOSIBILIDAD SICOLOGICA , de una subestimación de su capacidad creadora. Hay que motivar al alumno para que supere este vértigo.

En primer lugar hay que valorizar cualquier intento aunque sea erróneo. Es difícil convencer a un alumno de que le ha sido más útil esa media hora en la que infructuosamente intentó resolver un problema que la que pasó "aprendiendo" uno tras otro, los problemas ya resueltos. El alumno necesita tener éxito para superar esta barrera. "La intensidad de la motivación se incrementa con las vivencias del éxito y se debilita con las vivencias del fracaso. (...) Con éxitos experimentados una y otra vez se acrecienta la confianza de la persona en sus capacidades, se aventura a quehaceres y problemas cada vez más difíciles y encuentra en todas partes nuevas posibilidades de poner a prueba sus fuerzas. En cambio, tras repetidos fracasos se merma de tal manera la confianza en las propias fuerzas, que entre diferentes tareas graduadas conforme a la dificultad, se escogen sólo las más fáciles; a un nivel tan bajo de aspiraciones se reduce tambien al mínimo la satisfación causada por la motivación." (*)

La resistencia de los alumnos a intentar resolver problemas puede deberse a una FALTA DE CREATIVIDAD Y DE IMAGINACION. potenciada por una enseñanza básicamente expositiva. El origen de esta falta de creatividad puede estar en la represión que hemos hecho de la imaginación y del pensamiento divergente ya que cuando el profesor pregunta, el alumno trata de responder lo que el profesor espera, la respuesta considerada como correcta. Es necesario que el alumno proponga hipótesis aunque no sean correctas. No importa que muchas hipotesis sean incorrectas, lo importante es que una nos permita solucionar el problema. En una etapa posterior se analizarán y criticarán las diferentes hipótesis, pero en principio ninguna debe ser rechazada y hay que darle oportunidad al alumno de defenderlas. Solemos valorar únicamente el hallazgo de la solución, olvidándonos del valor formativo de la búsqueda. Para precisar algo más, citaremos las reglas básicas de un ejercicio de "brain storming" o chaparrón de ideas:

"* Prohibición estricta de todo tipo de crítica inmediata a las soluciones propuestas por el niño.

* Se incitaba a los niños a proponer el mayor número posible de soluciones.

* Se les estimulaba a combinar sus propuestas entre sí - aún las mas absurdas.

* Unicamente al final se sometían a juicio las ideas expuestas." (**)

(*) CORRELL, Werner, "El aprender", Editorial Herder, Barcelona, 1975, Pg.61

(**)LEITNER, Sebastian, "Así se aprende",Editorial Herder, Barcelona, 1976, Pg. 327

Aunque en el aprendizaje de la resolución de problemas es imprescindible el trabajo personal, es de gran utilidad el trabajo en pequeños grupos e incluso al nivel de toda la clase. El intercambio de opiniones y la discusión en pequeños grupos homogéneos favorece el desarrollo de hipótesis y de estrategias para la resolución de problemas. Este método es aconsejable siempre que no se reduzca a que el "listillo" imponga su idea o que la mayoría se limite a "chupar rueda".

El chaparrón de ideas a nivel de pequeño grupo o de toda la clase, es una buena forma de empezar si el profesor se las ingenia para que participen todos. El debe animar a los alumnos usualmente silenciosos a que sean los primeros en aportar sus ideas para evitar que simplemente se adhieran a una de las dadas. El desarrollo del problema puede hacerlo un alumno o el mismo profesor, siempre que éste se realice de forma coloquial, incitando a todos a participar y en especial , a los menos dispuestos a ello.

Estos ejercicios de realización comunitaria han de combinarse con ejercicios de trabajo personal. Es conveniente que parte del tiempo de clase se dedique a que los alumnos resuelvan personalmente los problemas mientras el profesor les orienta personalmente. Podría objetarse que esto lo podría hacer el alumno fuera del aula y que por lo tanto no es rentable gastar tiempo de clase en ello, teniendo en cuenta que siempre falta tiempo para completar el temario. Realmente no podemos estar seguros de que el alumno trate en casa de resolver los problemas propuestos en clase. Puede ser que lo intente y al encontrarse sólo ante las dificultades se desanime y no sólo lo deje sino que no lo intente la próxima vez. Por ello es rentable este empleo del tiempo de clase, al menos al principio y en aspectos fundamentales o especialmente difíciles. Mientras los alumnos intentan resolver el problema,o al menos de plantearlo, el profesor ha de observarlos, intentando ver cual es la dificultad, donde se atranca cada uno, orientarlos pero no resoverles el problema a unos pocos.

Una vez resuelto el problema en clase, el alumno que no ha llegado a la respuesta correcta, debe reflexionar sobre las causas que se lo han impedido.Insistamos que no se trata de calificar a los alumnos, sino que cada uno se enriquezca con las aportacciones de los demás.

Es difícil esquematizar y dar normas rígidas sobre la propia resolución de los problemas. Pero hemos de insistir en que el alumno ha de diseñar y examinar una serie de estrategias, de caminos, que le permitan plantear y resolver el problema. En los casos complejos el problema se dividirá en partes, considerando cada uno de los elementos o cuerpos del sistema (la polea y los cuerpos que penden de ella) y los diferentes sucesos o fases en los que puede dividirse el problema (antes del choque, en el choque propiamente dicho y después del choque; o la partícula que primero es acelerada y luego penetra en un campo magnético). Antes de ponerse a aplicar fórmulas y a realizar cálculos, los alumnos han de examinar cuidadosamente todas las estrategias posibles y elegir la que les parezca más sencilla y segura.

Para resolver los problemas, las leyes de la Física han de escribirse usualmente en LENGUAJE MATEMATICO. Las dificultades y lagunas en el cálculo algebraico, de derivadas e integrales, así como en el uso de los vectores y de la geometría, suponen muchas veces para los alumnos barreras infranqueables. Esto no es siempre debido a fallos del alumno, pues las dificultades y barreras matemáticas son tradicionales en el desarrollo de la Física. La imposibilidad de un determinado desarrollo matemático, nos ha de llevar a un nuevo planteamiento, a una nueva estrategia. Este cambio de estrategia supone a veces un cambio en el conocimiento de los hechos. Aveces no es posible resolver un problema siguiendo detalladamente la evolución del sistema como suelen permitir las ecuaciones del movimiento, la dinámica, pero las leyes de conservación nos permiten conectar diferentes estados del sistema sin precisar como evolucionó de un estado a otro, lo que puede ser suficiente para resolver el problema.

La resolución de un problema puede llegar a un callejón sin salida porque no se saben resolver las ecuaciones o estas son excesivamente complicadas y no puede obtenerse la respuesta numérica o en función de ciertas variables que se pedía. En estos casos, conviene releerse nuevamente el enunciado, analizar su esquema y representación , así como las simplificaciones que pueden deducirse del enunciado o que pueden suponerse (el enunciado no lo dice pero tampoco parece oponerse a ello). Ha de estudiarse si puede considerarse otro observador, otro sistema de referencia u otras variables que simplifiquen el problema. Tambien conviene analizar la estrategia seguida y las otras alternativas posibles.

Digamos una vez más que antes de comenzar a plantear ecuaciones y a realizar cálculos, el alumno debe sopesar las diferentes alternativas posibles para resolver el problema y elegir la más sencilla y segura.

6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

Con la resolución de los cálculos matemáticos no ha quedado resuelto el problema. Debemos leer nuevamente el enunciado para comprobar si lo obtenido es realmente lo pedido o quedan cálculos por hacer o alguna parte del problema por resolver.

Ha de comprobarse que la solución está de acuerdo con el enunciado y con la interpretación que se hizo de él, incluyendo las suposiciones y aproximaciones hechas. Las ecuaciones matemáticas no suelen incluir todos los datos del problema. Un choque entre dos cuerpos, por ejemplo, suele resolverse planteando las ecuaciones de conservación,pero no hemos escrito matemáticamente que los cuerpos son impenetrables y ni siquiera que el choque se ha verificado. Las ecuaciones que describen el movimiento de un cuerpo son indefinidas en el espacio y en el tiempo, pero usualmente no suelen plantearse la inecuaciones que describen el inicio del movimiento y sus límites.

El propio planteamiento del problema y los cálculos realizados pueden introducir respuestas extrañas, por lo que especialmente en el caso de respuestas múltiples, hay que discernir entre cuales cumplen todos los requisitos del enunciado y cuales hay que desechar.

Aunque la respuesta obtenida esté de acuerdo con el enunciado, puede parecernos extraña, absurda o irreal. Supongamos que para el movimiento de un automóvil obtengamos una velocidad de 10.000 Km/h, o mayor aún, e incluso próxima o superior a la velocidad de la luz en el vacio. Este resultado puede deberse a un error de cálculo, a las unidades empleadas, aunque tambien puede producirse por un enunciado incorrecto.

En estos casos, conviene revisar los datos y sus transcripciones al esquema o dibujo, si el sistema de unidades es correcto,las conversiones de unidades y los cálculos efectuados.

Algunos errores son originados por un incorrecto uso de las calculadoras, ya sea porque estas no operan con las cifras necesarias, no se elige el modo adecuado (grados, radianes...), no se respeta el orden de introducción de las cifras (funciones de dos variables como y^x) o el de prioridad de las operaciones, o simplemente porque se teclea mal.

Si el absurdo no es debido al cálculo, debe revisarse detenidamente el problema y la estrategia seguida por si se ha realizado una simplificación o interpretación inadecuada, las expresiones de las leyes no son correctas o se han aplicado mal, o no son correctos los valores de las constantes universales.

Si después de un detenido examen no encontramos la causa de este extraño resultado, debe añadirse una nota a la respuesta. Si el resultado contradice alguna ley o dato físico (velocidad mayor que la de la luz, densidad muy superior a los cuerpos terrestres conocidos...) debe hacerse notar que el alumno se ha percatado de ello. En el caso de velocidades muy próximas a la de la luz, debe advertirse que para una correcta resolución del problema debe emplearse la dinámica y cinemática relativista.

A veces son los propios datos los que son inusuales y por ello el resultado es tambien inusual. Pero el contexto del enunciado, si se refiere por ejemplo a naves espaciales, otros mundos..., puede hacer "lógico" unos datos y unos resultados extraños, siempre que no vulneren los principios de la Física.

7. REFLEXIÓN FINAL.

Después de varios intentos y un gran esfuerzo y gasto de tiempo, el problema está resuelto. ¿Ha valido la pena?, ¿que utilidad tiene este esfuerzo?. Dejamos que el propio alumno conteste estas preguntas más adelante y le planteamos otra; ¿qué he aprendido al resolver este problema?. El aprendizaje se refiere a los conceptos y leyes de la Física que ha precisado, a los desarrollos matemáticos y sobre todo a las estrategias y destrezas desarrolladas. ¿Cómo se enfocan los problemas similares a éste?, ¿ qué alternativas hay?, ¿qué camino suele ser el más sencillo y directo?,etc. Son preguntas que el alumno debe hacerse, o hay que hacérselas, al terminar de resolver un problema. Es un esfuerzo final que puede potenciar todos los esfuerzos anteriores y es tanto más importante cuanto más dificil haya sido la resolución del problema. Si el alumno no consiguió resolver el problema, al ver la solución en el libro o en la pizarra, puede y debe tratar de descubrir por que su camino no era correcto o por qué se atrancó en dicho punto.

Al conocer la solución de un problema, mucho más importante que el conocer la respuesta, "el como se hace", es descubrir cómo se ha llegado a resolverlo; que estrategias se plantearon y como se seleccionaron y desarrollaron. Al resolver problemas de Física, el alumno ha de aprender Física, pero al mismo tiempo ha de aprender a resolver problemas reales y ha de aumentar su capacidad de comprender y analizar el universo en el que vive.

Para resolver verdaderos problemas de Física no es suficiente saber Física, Matemáticas y Dibujo. Es decir, no son suficientes los conocimientos y la técnica, sino que hace falta algo más. Ese algo más, es esa chispa, ese "ureka" de las viñetas del TBO, ese descubrir el camino que lleva a la respuesta; es un arte que hay que desarrollar y aprender. Y no se aprende leyendo y memorizando libros y colecciones de problemas porque a pensar se aprende pensando y para encontrar la solución de un problema hay que aprender a buscarla, aunque las primeras búsquedas sean infructuosas. El alumno debe convencerse de que es más interesante pasarse horas tratando de resolver los problemas y profundizando en los conocimientos, que memorizando páginas y páginas antes de un examen. Si no se convence de esto no aprenderá a resolver problemas ni aprenderá Física, aunque el recuerdo de algun problema solucionado, la suerte y... le permitan resolver alguno que ya no se trataría de un problema sino de un ejercicio.

La unica manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas. Por ello el profesor ha de convencerles de que están capacitados para ello y que no se limiten a calcar los que se hacen en clase. Una metodología adecuada y una buena graduación en la dificultad, pueden ser la clave del éxito,siempre que el alumno se empeñe en conseguirlo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. DINÁMICA DE TRASLACIÓN

** 1.1 **

Julio 1982 - 2ª tanda - 2ª opción.

Dada la ecuación de movimiento de un punto:

$\vec{r} = \{(a \cos \omega t)\vec{i} + (b \cos \omega t)\vec{j} + ct\,\vec{k}\}$

en donde a,b,c y ω son constantes e $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ son los vectores unitarios en las direcciones positivas de los ejes cartesianos X, Y,Z, respectivamente. Se pide:

a) ¿Es el movimiento uniforme?

b) Describir la trayectoria del móvil.

a) Derivando el vector de posición $\vec{r}$ respecto del tiempo obtenemos el vector velocidad $\vec{v}$:

$\vec{v} = d\vec{r}/dt = (-a\omega \operatorname{sen} \omega t)\vec{i} + (-b\omega \operatorname{sen} \omega t)\vec{j} + c\vec{k}$

y como no todas sus componentes son constantes, no se trata de un movimiento rectilineo uniforme o movimiento uniforme en sentido estricto.

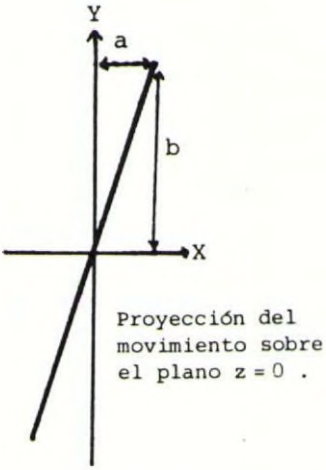
El módulo de la velocidad

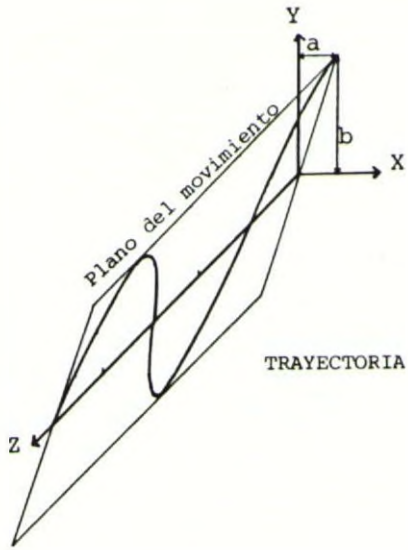
$|\vec{v}| = (a^2\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + b^2\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + c^2) = \{(a^2+b^2)\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + c^2\}^{\frac{1}{2}}$

depende del tiempo, por lo que no se trata tampoco de un movimiento uniforme en sentido amplio (como el movimiento circular uniforme).

b) Para estudiar la trayectoria del móvil, conviene escribir el vector de posición como $\vec{r} = (a\vec{i} + b\vec{j})\cos \omega t + ct\vec{k}$, observándose que la proyección del movimiento sobre el plano XY corresponde a un movimiento armónico simple, de periodo $T = 2\pi/\omega$, centrado en el origen de coordenadas y cuya amplitud viene dada por $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$, es decir, tiene lugar sobre la recta $y = (b/a)\,x$ y el valor de la amplitud es $A = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$. Su proyección sobre el eje Z corresponde a un movimiento uniforme de velocidad c.

Componiendo los movimientos de estas proyecciones, se deduce que la trayectoria del móvil es una sinusoide situada en el plano $y = (b/a)\,x$. (Ver figura en la página siguiente).





** 1.2 **

Julio 1981 - 1ª tanda - 1ª opción.

Estudiando experimentalmente el movimiento armónico simple de una partícula de 250 g de masa, elegímos el origen de tiempo en el instante en que la misma pasa por el punto de equilibrio y de elongación positiva a negativa y hacemos las siguientes medidas:

a) con un cronómetro medimos el tiempo que tarda en describir 100 oscilaciones completas, y resulta ser un minuto 20 segundos.

b) con un dinamómetro, que no perturba el movimiento, encontramos que el valor máximo de la fuerza que produce el mismo es de 25 newtons.

Determínense A, ω y ψ_0 en la ecuación del movimiento escrita de la forma:

$$x = A \cos (\omega t + \psi_0)$$

En el instante inicial (t=0) la partícula pasa por la posición de equilibrio que se toma como origen (x=0) y la elongación pasa de positiva a negativa, es decir, la velocidad es negativa (V<0). Utilizaremos las unidades del S.I.

$x = A \cdot \cos(\omega t + \psi_0)$ y como para $t = 0$ ha de ser $x = 0$; $\cos(\psi_0) = 0$, obteniendose como soluciones $\psi_0 = \pm \pi/2$. Derivando con respecto del tiempo la anterior expresión de la posición, se obtiene la de la velocidad; $V = dx/dt = -A \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \psi_0)$. Particularizando esta última expresión para $t = 0$ y $\psi = \pi/2$, resulta; $V = -A \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\pi/2) = -A \cdot \omega$, que está de acuerdo con el enunciado, mientras que particularizándola para $t = 0$ y $\psi = -\pi/2$ se otiene; $V = -A \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(-\pi/2) = A \cdot \omega$, en desacuerdo con el enunciado, por lo que $\underline{\psi_0 = \pi/2}$.

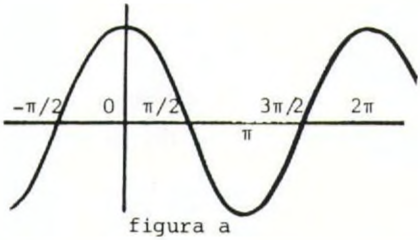


figura a

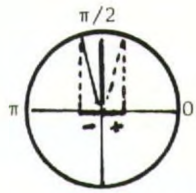


figura b

A este mismo resultado se llega, representando la función coseno y observando que para $\pi/2$ (y para $\pi/2 + 2n\pi$, n entero) se anula pasando de valores positivos a negativos (figura a).

Mediante la circunferencia trigonométrica (figura b) tambien puede observarse como para $\pi/2$ la función coseno se anula y pasa de valores positivos a negativos.

Para determinar ω, la medida a) nos permite calcular la frecuencia; f = número de oscilaciones/tiempo empleado = 100/80 = 1,25 Hz. y $\underline{\omega} = 2\pi f = \underline{2{,}5 \cdot \pi} = \underline{7{,}85\ s^{-1}}$

Para determinar A, la medida b) nos permite calcular la aceleración máxima; a_m = fuerza máxima / masa = $25/0{,}250 = 100 m/s^2$. Derivando respecto del tiempo la velocidad, o la elongación dos veces, se tiene $a = dV/dt = -\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \psi_0) = -\omega^2 \cdot x$ por lo que $a_m = \omega^2 \cdot A$ (A es el valor máximo de x) y $A = a_m/\omega^2 = 100 / 7{,}85^2$ y $\underline{A = 1{,}62\ m}$

En resumen; $x = A \cdot \cos(\omega t + \psi_0) = \underline{1{,}62} \cdot \cos(\underline{7{,}85} \cdot t + \underline{\pi/2})$ en m.

** 1.3 **

Septiembre 1982 - 1ª opción.

Un paracaidista tiene una masa de 80 Kg y todo el equipo, incluído el paracaídas, 50 Kg más. Cae desde una gran altura y el último tramo del recorrido hasta llegar al suelo lo recorre con velocidad constante. La aceleración de la gravedad en el lugar de la caida es de 9,78 m/s^2. ¿Cuál es el valor de la fuerza ascensional, en newtons, que actúa sobre el paracaidista y su equipo al llegar al suelo? ¿Qué tipo de movimiento es el de caida? Razónese la respuesta.

Sobre el paracaidista y su equipo actuan, además de su peso, la fuerza del viento y de las corrientes térmicas y la fuerza de rozamiento que va aumentando con la velocidad del paracaidista hasta que alcanza su valor máximo. La componente vertical de la resultante de todas estas fuerzas, menos la del peso, tiene sentido ascendente y se denomina fuerza ascensional. La fuerza ascensional es prácticamente despreciable hasta que se abre el paracaidas. Desde este momento va aumentando hasta que contrarresta al peso y desde ese momento el paracaidista cae con movimiento uniforme.

El paracaidista cae prácticamente con movimiento uniformemente acelerado, su aceleración es la de la gravedad, hasta que se abre el paracaidas. A partir de este momento el movimiento se hace acelerado no uniforme y la aceleración disminuye apreciablemente hasta que se anula, cayendo ya con movimiento uniforme (último tramo).

En el último tramo, el valor de la fuerza ascensional F es igual al peso del paracaidista y su equipo;

$\underline{F}$ = peso = (50 + 80) 9,8 = $\underline{1274\ N}$.

** 1.4 **

Junio de 1986 - 2ª tanda - 1ª opción.

Sobre un cuerpo de 10 Kg. actúa una fuerza dada por:

$\vec{F} = (10 + 2\,t)\,\vec{i}$ N. (t en s.)

a) Determinar los cambios en la cantidad de movimiento y velocidad del cuerpo cuando transcurran 4 s., así como el impulso recibido.

b) ¿Durante cuánto tiempo debería actuar la fuerza mencionada sobre el cuerpo para que el impulso recibido por esta sea de 200 N·s ?

Responder a ambas cuestiones para el caso en que el cuerpo esté inicialmente en reposo y para el caso en que su velocidad inicial sea $-6\,\vec{j}$ ms^{-1}.

Todos los valores corresponden a unidades del S.I. y el tiempo se cuenta a partir de t=0, es decir, el apartado a) se refiere a los cuatro primeros segundos.

a)

$\vec{I}(t) = \int_0^t \vec{F}\,dt = \int_0^t (10 + 2t)\cdot dt\,\vec{i} = (10t + t^2)\cdot\vec{i}$

y para t = 4 s ; $\underline{\vec{I}} = (10\cdot 4 + 4^2)\cdot\vec{i} = \underline{56\cdot\vec{i}\ \ N\cdot s}$

$\underline{\Delta\vec{p}} = \vec{I} = \underline{56\cdot\vec{i}\ Kg\cdot ms^{-1}}$ (ó tambien N·s)

$\Delta\vec{V} = \Delta\vec{p}/m = 56\cdot\vec{i}\ /\ 10 = 5{,}6\cdot\vec{i}\ \ ms^{-1}$

La velocidad depende de su valor inicial; $\vec{V} = \vec{V}_0 + \Delta\vec{V} = \vec{V}_0 + 5{,}6\,\vec{i}$

Si $\vec{V}_0 = 0$ $\quad \underline{\vec{V}} = 0 + 5{,}6\cdot\vec{i} = \underline{5{,}6\cdot\vec{i}\ ms^{-1}}$

$\vec{V}_0 = -6\cdot\vec{j}$ $\quad \underline{\vec{V} = -6\cdot\vec{j} + 5{,}6\cdot\vec{i}\ ms^{-1}}$

$\Delta\vec{p}$, $\Delta\vec{V}$ e $\vec{I}$ no dependen de la velocidad inicial y los resultados coinciden en ambos casos.

b) La respuesta es la misma para ambos casos, ya que no depende de $\vec{V}_0$.

I(t) = 200 ; $10\cdot t + t^2 = 200$; $t^2 + 10\cdot t - 200 = 0$; t= 10 s y t=-20s.

El enunciado se refiere al valor del impulso, es decir, al módulo. Como se ha supuesto que la fuerza actúa a partir de t = 0 s , la respuesta t= -20 s , no tiene sentido , siendo la respuesta correcta ; <u>t = 10 s</u>

** 1.5 **

Julio de 1981 - 1ª tanda - 2ª opción.

Un fusil pesa 6 Kg y dispara proyectiles de 7 mm de calibre y de 10 g de peso a 300 m/s. La longitud del tubo del cañón es de 50 cm. Calcular:

1) La velocidad de retroceso del fusil.
2) La presión de los gases de la pólvora.
3) El alcance máximo del fusil.

Método 1:

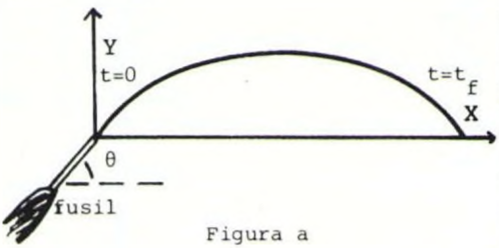


Figura a

1) Sobre el sistema bala-fusil no actúan fuerzas exteriores ya que la explosión es interior al sistema. Por ello se conserva la cantidad de movimiento del sistema y como del enunciado se deduce que ambos estaban inicialmente en reposo, la cantidad de movimiento inicial del sistema es cero.

$\vec{p}_f$ (fusil) + $\vec{p}_b$ (bala) = 0 ; $m_f \cdot \vec{V}_f + m_b \cdot \vec{V}_b = 0$ y $\vec{V}_f = m_b \cdot \vec{V}_b / m_f$ por lo que después del choque el fusil y la bala se mueven en la misma dirección, pero en sentidos opuestos y

$\underline{V_f} = m_b \cdot V_b / m_f = 0,010 \cdot 300/6 = \underline{0,5 \text{ m/s}}$

2) Presión = Fuerza / Superficie normal ; $P = F/S$

Aunque las fuerzas desarrolladas en una explosión no suelen ser constantes, para responder a esta pregunta tenemos que suponerlo o considerar valores medios. Por ello supondremos que F y tambien P y a (aceleración de la bala) son valores medios.

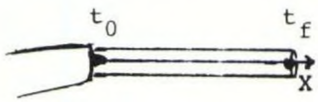


Figura b

Tomando el eje X en la dirección del cañón del fusil y el origen en la posición inicial de la bala, las ecuaciones del movimiento de la bala, se escriben (componente X).

$$\left|\begin{array}{l} a = \text{cte.} \\ V = a \cdot t \\ x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \end{array}\right. \text{ y en la boca del cañón: } t = t_f \left|\begin{array}{l} a = \text{cte.} \\ 300 = a \cdot t_f \\ 0,50 = \frac{1}{2} a t_f^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} t_f = 300/a \ (\&) \\ 0,50 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{90000}{a^2} \end{array}$$

$a = 90.000 \text{ m/s}^2$ y $F = m \cdot a = 0,010 \cdot 90.000 = 900$ N

La sección de la bala es cilíndrica y su radio es la mitad del calibre ; $r = 0,007/2 = 0,0035$ m por lo que su área es $S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0,0035^2 = 3,85 \cdot 10^{-5}$ m². La presión es por tanto ;

$\underline{P} = F / S = 900 / 3,85\ 10^{-5} = \underline{23,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2}$

3) El alcance máximo de un fusil es la mayor distancia a la que puede disparar éste. Considerando despreciable el rozamiento con el aire y la influencia del viento, el alcance máximo depende del angulo θ que forma el fusil con la horizontal, suponiendo que se dispara desde el suelo (figura a). Tomando el sistema de ejes de la figura a, las ecuaciones del movimiento de la bala disparada en t=0 son :

$$\left|\begin{array}{l} \vec{a} = (0\ ,\ -g) \\ \vec{V} = (300\cdot\cos\theta\ ,\ 300\cdot(\operatorname{sen}\theta)\cdot t - g\cdot t) \\ \vec{r} = (300\cdot(\cos\theta)\cdot t\ ,\ 300\cdot(\operatorname{sen}\theta)\cdot t - g\cdot t^2/2\ ) \end{array}\right.$$

Cuando el proyectil llega al suelo $t=t_f$ y $\vec{r} = (0,D)$;

(*) $D = 300\cdot(\cos\theta)\cdot t_f$ y (**) $0 = 300\cdot(\operatorname{sen}\theta)\cdot t_f - g\cdot t_f^2\ /\ 2$

Las soluciones de (**) son $t_f=0$ que corresponde al instante inicial (t_0) ya que el proyectil se lanza desde el suelo (y=0) y $t_f = 600\cdot\operatorname{sen}\theta/g$ (***) que es cuando el proyectil vuelve al suelo y sustituyendo este valor en (*) da $D = 300\cdot\cos\theta\cdot 600\cdot\operatorname{sen}\theta/g = 180000\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta/g = 90000\cdot\operatorname{sen}(2\cdot\theta)/g$ ($\ast\!\ast$).

Cómo el valor máximo de la función seno es uno, el valor máximo de la función D, ($\ast\!\ast$), corresponde a $\operatorname{sen}(2\cdot\theta_m) = 1$, es decir, $2\cdot\theta_m = \pi/2$; $\theta_m = \pi/4$, y sustituyendo este valor en ($\ast\!\ast$) se obtiene para el alcance máximo del fusil, el valor:

$$\underline{D_m} = 90000\cdot\operatorname{sen}(\pi/2)\ /9,8 = \underline{9.183\ \text{metros}}.$$

Al mismo resultado puede llegarse imponiendo:

$\frac{dD}{d\theta} = 0$ y $\frac{d^2D}{d\theta^2} < 0$, que son las condiciones para el máximo de una función, aunque el conocimiento de la función seno nos permite una solución más rapida.

<u>Método 2</u>:

Por el principio de acción y reacción, la fuerza $\vec{F}_p$ que el fusil ejerce sobre el proyectil es de igual modulo y dirección pero de sentido opuesto a la fuerza $\vec{F}_f$ que el proyectil ejerce sobre el fusil; $\vec{F}_p = -\vec{F}_f$ (+). Aunque las fuerzas desarrolladas en una explosión no suelen ser constantes, tendremos que suponerlo, o lo que es lo mismo, considerar valores medios. Esto tuvimos que hacerlo en el método 1 al responder a la pregunta 2ª, pero esta simplificación hay que hacerla tambien ahora para responder a la 1ª pregunta.

Es conveniente alterar el orden de las preguntas:

2) Esta pregunta se responde como en el primer método, obteniendose tambien $F_p = F = 900$ N.

1) De (+) $F_f = F_p = 900$ N. La aceleración media del fusil es $a_f = F_f / m_f = 900 / 6 = 150\ m/s^2$.

Si el fusil puede desplazarse libremente, lo hará en la dirección de salida del proyectil, es decir, en la del cañón. Tomaremos el eje X en la dirección del cañón y en el sentido de la aceleración del fusil (contrario al tomado en la figura b). El origen se toma en la posición inicial del centro de masa del fusil. Las ecuaciones del movimiento del fusil son (componente X):

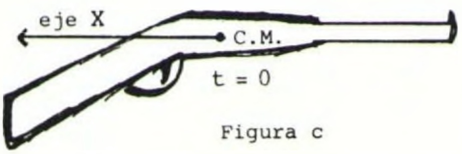


Figura c

$$\left| \begin{aligned} a_f &= 150 \\ V_f &= 150 \cdot t \\ x_f &= \tfrac{1}{2} \cdot 150 \cdot t^2 \end{aligned} \right.$$

Esta aceleración actúa mientras el proyectil está en el cañón, es decir, entre $t = 0$ y $t = t_f$. Al resolver la pregunta 2) (es lo mismo en ambos métodos) se obtuvo, $a = 90000\ m/s^2$, y según (&), $t_f = 300/a = 300/90000 = 0{,}00333$ s. La velocidad de retroceso del fusil o velocidad del fusil para $t = t_f$ que es cuando el proyectil abandona el fusil, es ;

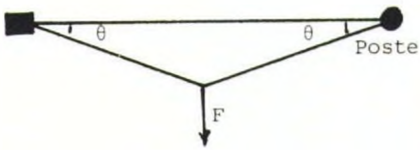
$$\underline{V_f(t_f)} = 150 \cdot t_f = 150 \cdot 0{,}00333 = \underline{0{,}5\ m/s}$$

Este resultado coincide con el del método 1º, como era de esperar. La pregunta 3) se resuelve como antes ya que no es afectada por el método seguido.

** 1.6 **

Septiembre 1989 - optativa - 2ª opción - problema 1

Una vagoneta en su vía, se encuentra parada. Para moverla se dispone de una cuerda larga y fuerte, que se ata por sus extremos al vehículo y a un poste, tirándose lateralmente de ella, como se indica en la fig. Determinar la tensión en la cuerda y la aceleración de la vagoneta cuando $\theta = 3^{o}$, $F = 400$ N y M de la vagoneta 250 Kg.



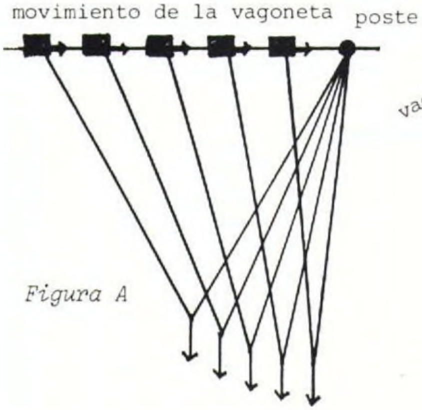


Figura A

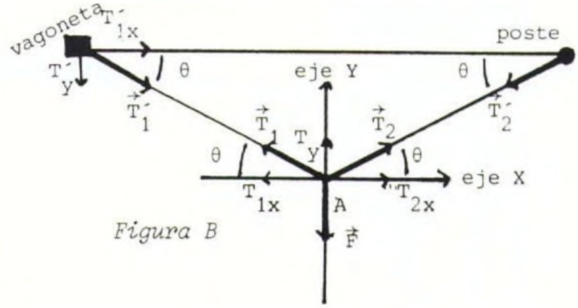


Figura B

Para resolver el problema es muy importante imaginarse el montaje descrito en el enunciado. De él se deduce que el plano del dibujo es horizontal, aunque muchos alumnos tienden erroneamente a considerarlo vertical.

Supongamos, como es costumbre a este nivel, que la cuerda es inextensible y de masa despreciable. En la figura se observa que los dos ángulos son iguales, es decir, se tira del punto medio de la cuerda por lo que el punto de aplicación de la fuerza ha de ser móvil. En la figura A) se han dibujado diferentes posiciones de la vagoneta en la que se nota el movimiento del punto de aplicación de la fuerza. Es aconsejable realizar este montaje experimentalmente. El estudio del movimiento de la vagoneta es complicado, pero no nuestro problema, ya que éste se refiere a un solo instante, cuando el ángulo $\theta = 3^{o}$.

La suma de las fuerzas que concurren en el punto A de aplicación de la fuerza, (figura B), es cero, pues aunque la cuerda se acelere, la masa de este "elemento pequeñísimo" de cuerda sería despreciable, incluso aunque no lo fuese la masa de toda la cuerda como consideramos nosotros.

$$\vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$$

que equivale a dos ecuaciones escalares, las de sus componentes x e y, que escribiremos en función de sus módulos y del angulo θ:

$$\left| \begin{array}{l} T_{1x} + T_{2x} = 0 \\ T_{1y} + T_{2y} = 0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} -T_1 \cdot \cos\theta + T_2 \cdot \cos\theta = 0 \\ T_1 \cdot \mathrm{sen}\theta + T_2 \cdot \cos\theta - F = 0 \end{array} \right.$$

De la primera ecuación se deduce que $T_1 = T_2$, lo que podía haberse supuesto incialmente debido a la simetría de la situación. De la segunda ecuación obtenemos;

$$T_1 = T_2 = F / (2 \cdot \mathrm{sen}\theta)$$

y sustituyendo los datos;

$$\underline{T_1 = T_2} = \frac{400}{2 \cdot \mathrm{sen}\ 3^{\circ}} = \underline{3821\ \mathrm{N}}$$

Puede parecer que esta fuerza es muy elevada, mucho mayor que la ejercida, pero esto puede conseguirse realmente. Las maquinas simples como las palancas, poleas moviles, tornos... nos permiten aumentar la fuerzas que hacemos, aunque no el trabajo. Este montaje constituye una auténtica máquina simple, aunque no sea muy conocida. No se ha de olvidar que hemos hecho una simplificación, una aproximación, ya que se ha considerado despreciable la masa de la cuerda.

La cuerda tira de la vagoneta con una fuerza $\vec{T}'_1$, de valor T_1, pero sólo su componente tangencial T'_{1x} es la que acelera la vagoneta;

$$T'_{1x} = T_1 \cdot \cos\theta = 3821 \cdot \cos\ 3^{\circ} = 3816$$

y aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de traslación;

$$\underline{a} = T'_{1x} / m = 3816 / 250 = \underline{15{,}3\ \mathrm{m/s^2}}$$

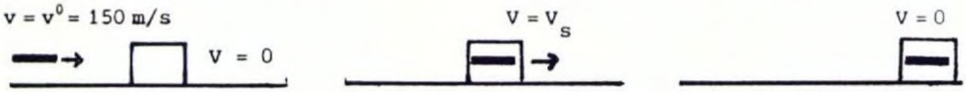
La componente T'_{1y} que la cuerda ejerce sobre la vagoneta normalmente a la vía, queda contrarrestada por la reacción de ésta, si la vía no se rompe y la vagoneta no descarrila.

** 1.7 **

Junio 1987 - 2ª tanda - 2ª opción.

Un bloque de madera de 2 Kg descansa sobre el tablero de una mesa larga. Se dispara una bala de 5 g contra el bloque, horizontalmente y con una velocidad de 150 m/s, quedando unidos. El bloque se desliza 3 m sobre la mesa, después del choque, y se detiene. (a) Encuentre la velocidad del bloque precisamente después del impacto. (b) Encuentre la fuerza de fricción entre la mesa y el bloque.

CHOQUE EVOLUCION DESPUES DEL CHOQUE



El impacto entre la bala y el bloque se produce en un tiempo muy pequeño, por lo que el espacio que se desplaza el bloque durante el impacto es despreciable. Esto equivale a considerar un choque instántaneo,durante el cual la influencia de las fuerzas exteriores es despreciable, y la evolución posterior del sistema bloque-bala (la bala incrustada en el bloque).

a) Dado que después del choque, nada impide el movimiento en la dirección del desplazamiento de la bala, se conserva el momento lineal del sistema bloque-bala . Si v_o es la componente de la velocidad inicial de la bala en esta dirección, y V la del bloque después del choque:

$$M_{bala} \cdot v_o = (M_{bala} + M_{bloque}) \cdot V$$

$$0,005 \cdot 150 = (2 + 0,005) \cdot V \qquad \underline{V = 0,374 \text{ m/s}}$$

Después del impacto, el bloque con la bala incrustada, se mueve con una velocidad de 0,374 m/s en la dirección y sentido del movimiento inicial de la bala.

b) Como el trabajo de rozamiento es igual a la disminución de la energía cinética;

$$W_R = \Delta E_c = -\tfrac{1}{2} \cdot (M_{bala} + M_{bloque}) \cdot V^2 = -\tfrac{1}{2} \cdot 2,005 \cdot 0,374 =$$

$$W_R = -0,140 \text{ julios. } (*)$$

El trabajo de rozamiento tambien puede escribirse en función de la fuerza de fricción y del desplazamiento del bloque;

$W_R = - F_R \cdot \Delta s = - F_R \cdot 3$ e igualando a (*) se tiene

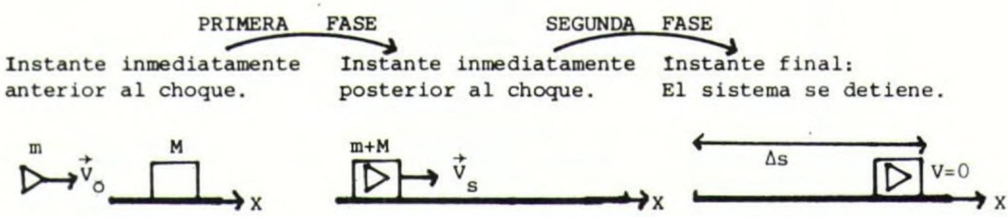
$- 3 \cdot F_R = - 0,140$ y $F_R = \underline{0,047 \text{ N}}$

** 1.8 **

Junio 1989 - 2ª tanda - obligatoria - 1ª opción - problema 1

Un bloque de madera de M=0.490 Kg, está en reposo sobre un plano horizontal. Sea 0.25 el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano. Se dispara una bala de m=0.01 Kg contra el bloque, alcanzándolo con la velocidad horizontal de 500 m/s, quedándose incrustada en él. Determinar: a) La energía cinética antes e inmediatamente después del choque. b) Distancia que recorrerá el bloque antes de detenerse.

Para resolver este problema conviene dividirlo en dos partes o fases que además, coinciden con las preguntas. En la primera fase tiene lugar el choque que al considerarse instántaneo, se conservará el momento lineal en la dirección horizontal ya que el impulso de las fuerzas de rozamiento ($F_r \cdot \Delta t$) es despreciable al serlo Δt. En la segunda fase, el bloque disminuye su velocidad hasta pararse, debido a la acción de las fuerzas de rozamiento.



Como las trayectorias de la bala y del C.M. del sistema bala-bloque son paralelas y en el sentido horizontal, tomaremos el eje X en la dirección y en el sentido del movimiento inicial de la bala. Al hablar de velocidad y momento lineal nos referiremos a las correspondientes componentes X.

a)

Después del choque, la bala y el proyectil salen unidos con velocidad V_s y la velocidad inicial del bloque es cero. Por ello, la conservación de la componente horizontal, la X, del momento lineal se escribe;

$$p_x \left(\begin{array}{l}\text{sistema después}\\ \text{del choque}\end{array}\right) = p_x \left(\begin{array}{l}\text{sistema antes}\\ \text{del choque}\end{array}\right) = p_x \left(\begin{array}{l}\text{inicial de}\\ \text{de la bala}\end{array}\right)$$

siendo $M_s = m + M = 0{,}010 + 0{,}490 = 0{,}500$ Kg la masa del sistema bala- bloque, resultando:

$$M_s \cdot V_s = m \cdot V_o \quad ; \quad V_s = \frac{m}{M_s} \cdot V_o = \frac{0{,}1}{0{,}50} 500 = 10 \text{ m/s}$$

La energía cinética del sistema antes del choque es la de la bala, que es igual a;

$$\underline{E_c \text{ (antes)}} = \frac{1}{2}\, m \cdot V_o^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \cdot 500^2 = \underline{1250 \text{ J.}}$$

Inmediatamente después del choque, la energía del sistema es;

$$\underline{E_c \text{ (después)}} = \frac{1}{2} \cdot M_s \cdot V_s^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 10^2 = \underline{25 \text{ J.}}$$

Adviértase que la energía cinética ha disminuido al ser el choque inelástico, denominandose choque completamente inelástico a este tipo de choque en el que los dos cuerpos quedan unidos.

b) La energía cinética que el sistema bloque-bala posee inmediatamente después del choque, se pierde debido al rozamiento con el plano.

$$W_R = -\Delta E_c = -E_c \text{(después)}$$

Como el peso es la única fuerza que oprime el bloque contra el plano y lo hace normalmente

$$F_R = M_s \cdot g \qquad y \qquad W_R = -F_R \cdot \Delta s$$

ya que la fuerza de rozamiento tiene sentido opuesto al desplazamiento, representado por Δs . De las expresiones anteriores;

$$-E_c\text{(después)} = -M_s \cdot g \cdot \Delta s \quad ; \quad 25 = 0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot \Delta s \quad ; \quad \underline{\Delta s = 20{,}4 \text{ m}}$$

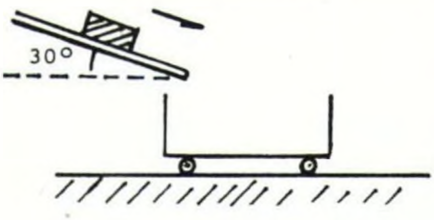
<u>Se desplaza 20,4 metros antes de detenerse.</u>

La situación planteada en este problema es la misma del problema anterior, aunque no coinciden las preguntas. Si el alumno tuvo alguna dificultad en resolver el otro problema, la resolución de éste (resolverlo, no leer la solución) le ayudará a asimilarlo. Adviértase que la forma de expresar la solución de ambos problemas no es exactamente la misma. Es aconsejable que el alumno se acostumbre a cierta flexibilidad en las notaciones, en los pasos....

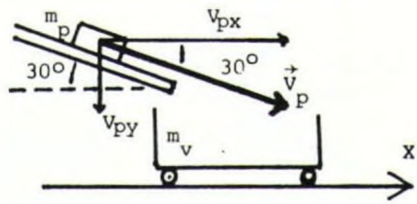
** 1.9 **

Junio 1989 - 2ª tanda - obligatoria - 1ª opción - problema 1

Un paquete de 10 Kg, se descarga de una cinta transportadora con una velocidad de 3 m/s y cae en una vagoneta de 25 Kg. Sabiendo que la vagoneta está inicialmente en reposo y que puede rodar libremente, determinar su velocidad final.



Los hechos descritos corresponden al choque de un paquete con una vagoneta, siendo de los denominados "choques completamente inelásticos" por quedar ambos cuerpos unidos después del choque. Como la vagoneta sólo puede moverse horizontalmente, esta es la dirección del movimiento del sistema después del choque , por lo que sólo se conserva la componente horizontal del momento lineal o componente X según el sistema de referencia elegido (ver figura).



Al estar la vagoneta inicialmente en reposo, la componente X del momento lineal inicial del sistema, p_{ox}, es la del paquete cuya componente X de la velocidad, V_{px}, coincide con la de la cinta transportadora. Puede objetarse que no se ha tenido en cuenta la aceleración de caida del paquete, la debida a la atracción gravitatoria de la Tierra, pero adviértase que esta es vertical y no modifica la componente horizontal, la X, de la velocidad del paquete. El valor de la velocidad del paquete al chocar con la vagoneta puede ser apreciablemente mayor que el de la cinta transportadora, 3 m/s, pero su componente X será la misma.

$$p_{ox} = m_p \cdot V_{px} = m_p \cdot V_p \cdot \cos 30^o = 10 \cdot 3 \cdot \cos 30^o = 25,98$$

La componente X del momento lineal final del sistema, p_{fx}, es

$$p_{fx} = (m_p + m_v) \cdot V = (10 + 25) \cdot V = 35 \cdot V$$

donde V es la velocidad de la vagoneta después del choque, que sólo tiene componente X. De la conservación de la componente X del momento lineal;

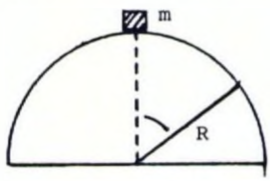
$$p_{ox} = p_{fx} \; ; \quad 25{,}98 = 35\ V \; ; \; \underline{V} = \frac{25{,}98}{35} = \underline{0{,}742\ m/s}$$

Algunos problemas similares a éste pueden resolverse considerando que al no actuar fuerzas exteriores , la velocidad del C.M. del sistema se conserva. Esto es en realidad equivalente a la conservación del momento lineal, aunque es mas formal. Pero en este problema, ni la componente vertical, la y, del momento lineal ni de la velocidad del C.M.,del sistema se conservan ya que en el choque, y después de él, actuan fuerzas muy intensas que impiden que el paquete atraviese el suelo de la vagoneta. Sí podría resolverse este problema, considerando que la componente X de la velocidad del C.M. del sistema,se conserva.

** 1.10 **

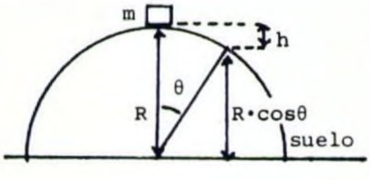
Septiembre 1989 - optativa - 1ª opción - problema 1

Una masa puntual m parte del reposo y resbala hacia abajo, sobre la superficie, sin rozamiento, de una esfera sólida de radio R, como se muestra en la fig. Determinar: a) La variación de la energía potencial de m en función del ángulo. b) La energía cinética en función del ángulo.



c) El ángulo en el que se separa la masa m de la superficie de la esfera.

a) Si la masa se desplaza sobre la esfera un angulo θ, habrá descendido una altura $h = R - R\cdot\cos\theta$ (hemos definido h de modo que sea positiva) por lo que la variación de la energia potencial será;



$$-\Delta E_p = m\cdot g\cdot h = m\cdot g\cdot(R - R\cdot\cos\theta) =$$

$$= m\cdot g\cdot R\cdot(1 - \cos\theta)$$

$$\Delta E_p = - m\cdot g\cdot R\cdot(1 - \cos\theta) \quad (*)$$

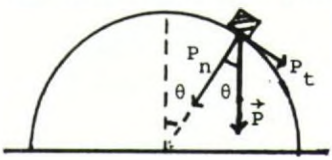
que es un valor negativo ($1 - \cos\theta \geq 0$, para $0 \leq \theta \leq \pi/2$) ya que la energía potencial disminuye al descender. Según (*), cuando la masa aún no se ha desplazado ($\theta = 0$) $\Delta E_p = 0$ y cuando llega al suelo ($\theta = \pi/2$) $\Delta E_p = - m\cdot g\cdot R$, como era de esperar.

b) Como la masa resbala sin rozamiento, la energía mecánica se conserva; $\Delta E_p + \Delta E_c = 0$, y como la energía cinética inicial es cero, para un angulo θ ;

$$\underline{E_c = \Delta E_c = -\Delta E_p = m \cdot g \cdot R\ (1 - \cos\theta)} \qquad (**)$$

es decir, lo que disminuye la energía potencial es lo que aumenta la energía cinética.

c) Si dejamos caer la masa desde $\theta = 0$, esta deslizará por la esfera, pero antes de llegar al suelo se separará de la esfera. Antes



de separarse, la masa describe un arco de circunferencia por lo que tendrá que actuar sobre ella una fuerza centrípeta, F_c. Sobre la masa actua su peso que consideraremos descompuesto en sus componentes tangencial, P_t, y normal, P_n, que está dirigida hacia el centro de la esfera, y ambas dependen de θ. La componente P_t tiene la dirección de la trayectoria por lo que su efecto será acelerarla de modo que aumente su velocidad y su energía cinética de acuerdo con (**). La componente P_n es normal por lo que actuará en parte como fuerza centrípeta y en parte será contrarrestada por la reacción de la esfera. De la figura se obtiene que $P_n = P \cdot \cos\theta = m \cdot g \cdot \cos\theta$, disminuyendo al aumentar θ.

Al desplazarse la masa puntual sobre la esfera, al aumentar θ, aumenta tambien su velocidad y por lo tanto $F_c = m \cdot V^2/R$, al tiempo que disminuye P_n . Para $\theta = \theta_S$, $F_c = P_n$ y al seguir moviendose ($\theta > \theta_S$), $P_n < F_c$ y ya no es suficiente para doblar la trayectoria de modo que describa un arco de radio R, por lo que la masa abandonará la esfera.

Vamos ahora a calcular este valor límite θ_S. La fuerza centrípeta puede escribirse en función de la energía cinética , $E_c = m \cdot V^2/2$ y según (**);

$$F_c = \frac{m \cdot V^2}{R} = \frac{2 \cdot E_c}{R} = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos\theta)}{R} = 2 \cdot m \cdot g \cdot (1 - \cos\theta)$$

y como para $\theta = \theta_S$, $P_n = F_c$, resulta;

$$m \cdot g \cdot \cos\theta_S = 2 \cdot m \cdot g \cdot (1 - \cos\theta_S) \ ; \ \cos\theta_S = 2 - 2 \cdot \cos\theta_S$$

$$\cos\theta_S = 2/3 = 0{,}667 \quad y \quad \underline{\theta_S = 48^o\ 11'23''}$$

Añadamos que como para $\theta = 0$, $P_t = m \cdot g \cdot \text{sen}\theta = 0$, para que comience a deslizar hay que comunicarle un ligero impulso inicial.

** 1.11 **

1985 - 1ª opción.

Una partícula de 2 Kg de masa se mueve bajo la influencia de una sola fuerza conservativa que disminuye su velocidad de 20 a 10 m/s.

a) Determinar la variación de energía cinética, de energía potencial y la variación de energía mecánica total de la partícula.

b) Si la energía potencial original de la partícula era de 100 J (cuando se mueve a 20 m/s), determinar la energía potencial y la energía total cuando la velocidad es de 10 m/s.

a) Si sólo actúa sobre la partícula una fuerza conservativa, la energía mecánica total de la partícula, es decir, la suma de su energía cinética y de su energía potencial correspondiente a la fuerza conservativa, no varía, se conserva.

Como de los datos del problema la energía cinética disminuye;

$\Delta E_c = E_{cf} - E_{co} = \frac{1}{2}m\cdot V_f^2 - \frac{1}{2}m\cdot V_o^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 20^2 = -\ 300$ J.

la energía potencial aumentará;

$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $\Delta E_p = -\ \Delta E_c = -\ (-300) = 300$ J.

b) Al conservarse la energía mecánica, en el instante final, la energía mecánica es la misma que en el inicial.

$E_f = E_o = E_{co} + E_{po} = \frac{1}{2}m\ V_o^2 + E_p = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^2 + 100 = 500$ J.

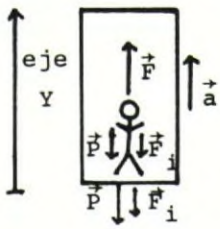
$E_{pf} = E_f - E_{cf} = E_f - \frac{1}{2}m\cdot V_o^2 = 500 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^2 = 400$ J.

** 1.12 **

Septiembre de 1981 - 2ª tanda - 2ª opción.

Un hombre de 80 Kg. se halla de pie en el interior de un ascensor. ¿Qué fuerza ejerce el suelo cuando el ascensor está: a) en reposo, b) acelerando hacia arriba a 2,5 m/s^2 y c) moviendose hacia arriba con celeridad constante?

a) La tierra ejerce sobre el hombre una fuerza que llamamos peso, $\vec{P}$. De no existir el suelo, esta fuerza aceleraría al hombre hacia abajo. Al interponerse el suelo, el hombre



ejerce sobre él la fuerza de su peso. El suelo reacciona sobre el hombre ejerciendo sobre él una fuerza $\vec{F}$ de igual módulo y dirección pero en sentido contrario, que contrarrestará el peso y el hombre permanecerá en equilibrio o resultante nula. Si el suelo del ascensor fuese muy endeble, no podría realizar la fuerza $\vec{F}$ que contrarresta el peso $\vec{P}$ del hombre y el suelo se rompería cayendose el hombre aceleradamente hacia abajo.

Luego $\vec{F}+\vec{P}=0$; $\vec{F}=-\vec{P}$; $F = P = 80\cdot 9{,}8 = 784$ N

<u>El suelo ejerce una fuerza de 784 N</u> en dirección vertical y hacia arriba.

b) <u>Método 1:</u>

Para el hombre en el ascensor, él está en equilibrio (y en reposo). Pero sabe que el ascensor está acelerado por lo que sobre el actúan su peso y una fuerza de inercia en sentido contrario a la aceleración del ascensor. A la suma de estas dos fuerzas se denomina peso aparente pues es lo que marcaría una báscula al pesarse el hombre en el ascensor acelerado.

$$\vec{P}_a = \vec{P} + \vec{F}_i = \vec{P} - m\vec{a} = -m\cdot g\cdot\vec{u}_y - m\cdot(a\cdot\vec{u}_y) = -m\cdot(g+a)\,\vec{u}_y =$$
$$= -80\cdot(9{,}8+2{,}5)\vec{u}_y = -948\cdot\vec{u}_y \text{ N.}$$

es decir, el peso y la fuerza de inercia se suman ya que tienen el mismo sentido. La fuerza $\vec{F}$ que ejerce el suelo sobre el hombre ha de contrarrestar su peso aparente; $\vec{F}+\vec{P}_a = 0$; $\vec{F} = \vec{P}_a = 984$ N.

<u>Método 2</u>:

Un observador situado fuera del ascensor considerará que la fuerza $\vec{F}$ que ejerce el suelo del ascensor sobre el hombre no solo contraresta su peso $\vec{P}$, sino que ha de acelerarlo hacia arriba,es decir; $\vec{F}+\vec{P} = m\cdot\vec{a}$; $F\cdot\vec{u}_y - m\cdot g\cdot\vec{u}_y = m\cdot a\cdot\vec{u}_y$ y

$F = m\cdot g + m\cdot a = m\cdot(g+a) = 80\ (9{,}8+2{,}5) = 984$ N.

<u>El suelo ejerce una fuerza de 984 N en dirección vertical y hacia arriba.</u>

c) Suele llamarse celeridad o rapidez, al módulo de la velocidad. Como un m.r.u. supone una aceleración nula, la única fuerza que actúa sobre el hombre es el peso (incluso para el observador en el ascensor) por lo que la solución es la misma que en a)

<u>El suelo ejerce una fuerza de 784 N en dirección vertical y hacia arriba.</u>

**** 1.13 ****

Septiembre 1987 - 1ª opción.

Un ascensor parte del reposo con una aceleración constante hacia arriba. Se mueve 2m en los primeros 0.06s. Dentro del ascensor, un pasajero está sosteniendo un paquete de 3Kg, por medio de una cuerda vertical. ¿Cuál es la tensión de la cuerda durante el proceso de aceleración?

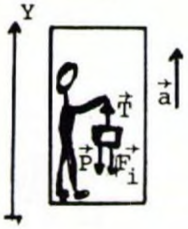
Los datos sobre el ascensor nos permite calcular la aceleración de éste, pues partiendo del reposo se desplaza una distancia s con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$s = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \quad ; \quad a = \frac{2\cdot s}{t^2} = \frac{2\cdot 2}{0{,}06^2} = 1111{,}1$$

Esta aceleración es demasiado elevada ya que es superior a 100 veces la de la gravedad y un coche que con esta aceleración parta del reposo, alcanza los 100 Km/h en 0,025 s, mientras lo usual es unos 10 s.

La tensión de la cuerda puede medirse intercalando un dinamómetro en la cuerda. Su cálculo puede realizarse desde dos observadores diferentes, o siguiendo dos métodos distintos:

Método 1:



Para un observador en el interior del ascensor, el paquete esta en equilibrio y en reposo por lo que la tensión de la cuerda contrarresta la fuerza total que se ejerce sobre el paquete, tambien llamada peso aparente, $\vec{P}_a$. Al estar el ascensor acelerado, sobre el paquete se ejerce una fuerza de inercia ($\vec{F}_i$) en sentido contrario a la aceleración del ascensor y la atracción gravitatoria terrestre o peso ($\vec{P}$).

$$\vec{T} + \vec{P}_a = 0 \;;\; \vec{T} = -\vec{P}_a = -(\vec{P} + \vec{F}_i) = -(-m\cdot g\cdot \vec{u}_y - m\cdot a\cdot \vec{u}_y) = m\,(g + a)\,\vec{u}_y$$

$$T = m\,(g + a) = 3\,(9{,}8 + 1111{,}1) = 3\cdot 1120.9 = \underline{3362{,}7\text{ N}}$$

Método 2:

Un observador fuera del ascensor, ve subir el paquete con movimiento uniformemente acelerado, por lo que la tensión de la cuerda no sólo ha de compensar el peso del paquete, sino que también ha de acelerarlo.

$$\vec{T} + \vec{P} = m\cdot\vec{a} \;;\; T\cdot\vec{u}_y - P\cdot\vec{u}_y = m\cdot a\cdot\vec{u}_y \;;\; T = P + m\cdot a = m\cdot g + m\cdot a = m\cdot(g + a) = \underline{3362{,}7\text{ N}}$$

** 1.14 **

Julio 1981 - 2ª tanda - 1ª opción.

Un móvil sigue una trayectoria horizontal merced a una fuerza horizontal y dirigida siempre en la dirección de su velocidad. La potencia es constante e igual a 1 watio y la masa de 2 kilogramos. Calcular la ecuación de su movimiento cuando se empieza a contar el tiempo en el momento de iniciarse aquél. Calcular la velocidad y aceleración a los 144 m de recorrido y el tiempo que se invierte en este trayecto.

El enunciado no habla de rozamiento por lo que lo supondremos despreciable. Al existir una fuerza hay aceleración y la velocidad varía con el tiempo. Como $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$ (*) al ser ambas paralelas y en el mismo sentido;

$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = F\cdot v = m\cdot a\cdot v = m\cdot(dv/dt)\cdot v$

si se tiene en cuenta la ecuación fundamental de la dinámica y la definición de aceleración. Sustituyendo los datos, se tiene;

$$1 = 2\cdot\frac{dv}{dt}\cdot v \quad \text{que equivale a} \quad dt = 2\cdot v\cdot dv$$

Para $t = 0$, $v = 0$, ya que se cuenta el tiempo a partir del inicio del movimiento, aunque de acuerdo con (*) esto suponga que la fuerza se hace en ese instante infinita. Integrando entre el instante inicial ($t = 0$ y $v = 0$) y un instante genérico posterior (t , v) se tiene;

$$\int_0^t dt = \int_0^v 2\cdot v\cdot dv \ ; \ t = v^2 \ ; \ v = t^{\frac{1}{2}} \quad (**)$$

De la definición de velocidad; $v = ds/dt$ y $ds = v\cdot dt$ y suponiendo que al iniciarse el movimiento, el móvil estaba en el origen, es decir, para $t = 0$, $s = 0$, e integrando desde el instante inicial hasta un instante genérico (t , s), tenemos;

$$\int_0^s ds = \int_0^t t^{\frac{1}{2}}\cdot dt \ ; \quad \underline{s = \frac{2}{3}\cdot t^{3/2}}$$

Derivando (**) obtenemos la ecuación de la aceleración, y podemos escribir:

$$a = \frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}} \ , \quad v = t^{\frac{1}{2}} \quad y \quad s = \frac{2}{3}\cdot t^{3/2}$$

y para $s = 144$ tenemos; $144 = \frac{2}{3}\cdot t^{3/2}$; $t^{3/2} = 216$; $\underline{t = 36\ s}$ que al sustituirlo da $\underline{v = 6\ m/s}$ y $\underline{a = 0{,}083\ m/s}$, pudiéndose comprobar que $P = m\cdot v\cdot a = 2\cdot 6\cdot 0{,}083 = 1$ w.

** 1.15 **

Julio de 1986 -1ª tanda -2ª opción

Dos cuerpos de 2 y 4 Kg. están situados inicialmente en los puntos (0,0)m. y (4,3)m. respectivamente, encontrándose en reposo. Se aplica al primero de ellos una fuerza de $-12\,\vec{i}$ N. y al segundo una fuerza de $18\,\vec{j}$ N. Determinar:

a) La posición incial del centro de masas del sistema.

b) La aceleración del centro de masas del sistema.

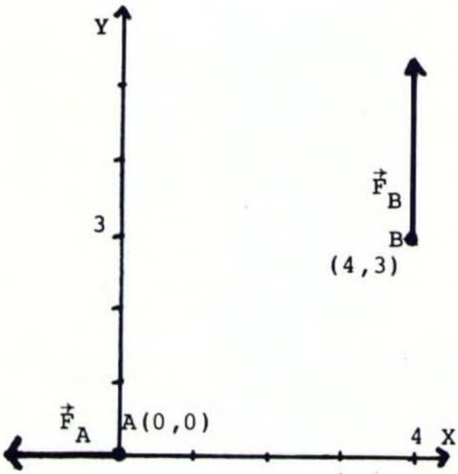
c) Las ecuaciones que describen la trayectoria del centro de masas, en función del tiempo.

Cuerpo	masa	posición inicial	fuerza sobre él
A	$m_A = 2$ Kg	$\vec{r}_{A0} = (0,0)$ m	$\vec{F}_A = (-12,0)$ N
B	$m_B = 4$ Kg	$\vec{r}_{B0} = (4,3)$ m	$\vec{F}_B = (0,18)$ N

La masa del sistema es $M = m_a + m_b = 2 + 4 = 6$ Kg

Fuerza sobre el sistema; $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = (-12,0) + (0,18) = (-12,18)$ N

a) $\underline{\vec{R}_0} = (m_A \cdot \vec{r}_{A0} + m_B \cdot \vec{r}_{B0}) / M = $
$= (16,12)/6 = \underline{(8/3\ ,\ 2)\ \text{m}}$



Método 1:

b) $\underline{\vec{a}} = \vec{F} / M = (-12\ ,\ 18)/6 =$
$= \underline{(-2\ ,\ 3)}\ \text{m/s}^2$

c) Como el sistema está inicialmente en reposo y la aceleración $\vec{a}$ es constante, el movimiento sera rectilineo y uniformemente acelerado:

$\underline{\vec{R}} = \vec{R}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = (8/3,2) + \frac{1}{2}(-2,3)t^2 =$

$\underline{((8/3)-t^2\ ,\ 2 + (3/2)t^2)}$ m (*)

Método 2:

b) La aceleración a la que está sometida cada partícula es; $\vec{a}_A = \vec{F}_A/m_A = (-12,0)/2 = (-6,0)$ m/s^2

$\vec{a}_B = \vec{F}_B/m_B = (0,18)/4 = (0,9/2)$ m/s^2 y la aceleración del sistema;

$\underline{\vec{a}} = (m_A \cdot \vec{a}_A + m_B \cdot \vec{a}_B)/M = (2\cdot(-6,0) + 4\cdot(0,9/2))/6 = \underline{(-2,3)\ \text{m/s}^2}$

c) Al ser su aceleración constante y partir del reposo, cada cuerpo describe un movimiento rectilineo de ecuación:

$\vec{r}_A = \vec{r}_{A0} + \frac{1}{2}\vec{a}_A t^2 = (0,0) + \frac{1}{2}(-6,0)t^2 = (-3t^2,0)$ m/s^2

$\vec{r}_B = \vec{r}_{B0} + \frac{1}{2}\vec{a}_B t^2 = (4,3) + \frac{1}{2}(0,9/2)t^2 = (4\ ,\ 3+(9/4)t^2)$m/s^2 y por tanto;

$\underline{\vec{R}} = (m_A \cdot \vec{r}_A + m_B \cdot \vec{r}_B)/M = (2\cdot(-3t^2,0) + 4\cdot(4\ ,\ 3+(9/4)t^2))\ /\ 6 =$

$\underline{((8/3) - t^2\ ,\ 2 + (3/2)t^2)}$ m (*)

Si las consideraciones anteriores y el examen del vector de posición del C.M. (*) o ecuaciones parámetricas del movimiento, $R = ((8/3) - t^2, 2 + (3/2)t^2)$, no son suficientes para deducir que la trayectoria del C.M. es una recta, conviene recordar que (*) equivale a :

$$\left| \begin{array}{ll} X = (8/3) - t^2 & (**) \\ Y = 2 + (3/2)t^2 & (***) \end{array} \right.$$

donde X e Y son las coordenadas del C.M.. Despejando t^2 en (**) y sustituyéndolo en (***) se obtiene $Y = 6 - (3/2)X$ que es la ecuación de una recta que pasa por el punto definido por $\vec{R}_0$ y cuya dirección o pendiente es la de la aceleración $\vec{a}$ del C.M. Recordemos que se está en el plano XY o plano $z = 0$.

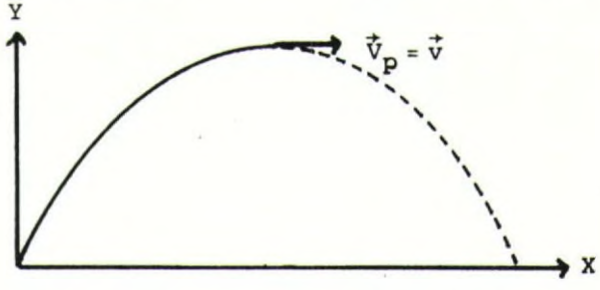
** 1.16 **

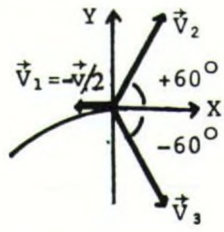
Septiembre 1984 - 1ª opción.

Un proyectil estalla, dividiéndose en tres fragmentos iguales, cuando se encuentra en el punto más alto de su trayectoria y lleva una velocidad v. Suponiendo que uno de los fragmentos sale despedido horizontalmente hacia atrás, con una velocidad v/2, y que, los otros dos salen hacia adelante formando angulos de $+60^{\circ}$ y -60°, con la horizontal.

1º Calcular la velocidad de estos dos últimos fragmentos

2º ¿En que orden llegarán a tierra? Justifique la respuesta.





1º. Consideraremos que después del choque los tres fragmentos se mueven en un mismo plano vertical, que tomaremos como plano XY, pues de lo contrario faltarían datos. Tomaremos el eje X sobre la proyección de la trayectoria del proyectil sobre el suelo y el origen en el punto de lanzamiento, considerando que se lanzó desde el suelo.

Si llamamos m a la masa de cada uno de los fragmentos, la masa M del proyectil será igual a 3m, si se considera despreciable la disminución de masa en la explosión, es decir, la masa expansionada en forma gaseosa.

El proyectil alcanza el punto más alto de su trayectoria cuando no sube más, por lo que su velocidad en ese punto es horizontal. Por todo esto, la velocidad del proyectil un instante antes de la explosión es $\vec{V}_p = (v\ ,\ 0)$ y su momento $P_p = (3mv, 0)$. Inmediatamente después del choque, la velocidad y el momento de los fragmentos serán:

$\vec{V}_1 = (-0{,}5 \cdot v\ ,\ 0)$ $\qquad \vec{p}_1 = m \cdot \vec{V}_1$

$\vec{V}_2 = (V_2 \cdot \cos 60\ , V_2 \cdot \mathrm{sen}\ 60\ ) = (0{,}5 \cdot V_2, 0{,}866 \cdot V_2)$ $\qquad \vec{p}_2 = m \cdot \vec{V}_2$

$\vec{V}_3 = (V_3 \cdot \cos -60\ ,\ V_3 \cdot \mathrm{sen} -60\ ) = (0{,}5 \cdot V_3\ ,\ -0{,}866 \cdot V_3)$; $\qquad \vec{p}_3 = m \cdot \vec{V}_3$

Como la explosión se considera instantánea, la influencia de las fuerzas exteriores (el impulso en particular) es despreciable, por lo que el momento lineal se conserva:

$$\vec{p}_p = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$(3 \cdot m \cdot v\ ,\ 0) = (-0{,}5 \cdot m \cdot v + 0{,}5 \cdot m \cdot V_2 + 0{,}5 \cdot m \cdot V_3,\ 0{,}866 \cdot m \cdot V_2 - 0{,}866 \cdot m \cdot V_3)$

que supone un sistema de dos ecuaciones. De la segunda ecuación se deduce $V_2 = V_3$ y sustituyéndolo en la primera se obtiene;

$\mathbf{V_2 = V_3 = 3{,}5\ v}$

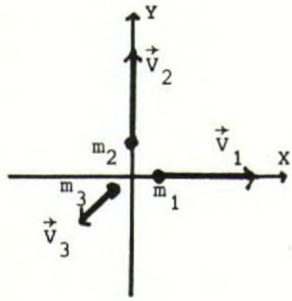
2º. LLegará primero al suelo el cuerpo o fragmento cuya componente de la velocidad en la dirección vertical descendente sea mayor. Como $V_{1y} = 0$, $V_{2y} = 0{,}866 \cdot v = 3 \cdot v$ y $V_{3y} = -\ 0{,}866 \cdot v = -\ 3 \cdot v$, llegará primero el fragmento que sale con un ángulo de -60^o ($\vec{V}_3$), luego el que sale hacia atrás ($\vec{V}_1$) y finalmente el que sale con un angulo de $+60^o$ ($\vec{V}_2$) (su velocidad hacia abajo es negativa).

** 1.17 **

Junio 1989 - 1ª tanda - obligatoria - 2ª opción - problema 1

Una vasija que estaba en reposo, explota rompiéndose en tres fragmentos. Dos de ellos, que tienen igual masa, vuelan perpendicularmente entre sí y con la misma velocidad de 30 m/s. El tercer fragmento tiene tres veces la masa de cada uno de los otros dos. ¿Cuál es la dirección y el módulo de su velocidad inmediatamente después de la explosión?.

Llamaremos 1 y 2 a los fragmentos de igual masa, $m_1 = m_2 = m$, y 3 al tercero cuya masa es $m_3 = 3\ m$. Consideraremos que los tres fragmentos son puntuales, lo que equivale a considerar el movimientos de los C.M. de cada uno de los fragmentos.



Método 1

Los semiejes positivos X e Y los tomaremos en las direcciones y sentidos del movimiento de los dos primeros fragmentos y el eje Z lo tomaremos perpendicularmente a ellos. Aunque para que se conserve el momento lineal del sistema formado por los tres fragmentos, estos han de moverse en un mismo plano, el XY, no es necesario hacer esta consideración inicialmente. (La figura se hace en dos dimensiones por sencillez)

$$\begin{array}{lll}
m_1 = m & \vec{v}_1 = (30,\ 0,\ 0) & \vec{p}_1 = m\cdot\vec{v}_1 = (30\cdot m\ ,\ 0\ ,\ 0\ ) \\
m_2 = m & \vec{v}_2 = (\ 0,\ 30,\ 0) & \vec{p}_2 = m\cdot\vec{v}_2 = (\ 0\ ,\ 30\cdot m\ ,\ 0\ ) \\
m_3 = 3\cdot m & \vec{v}_3 = (V_x,\ V_y,\ V_z) & \vec{p}_3 = 3\cdot m\cdot\vec{v}_3 = (3\cdot m\cdot V_x,\ 3\cdot m\cdot V_y,\ 3\cdot m\cdot V_z) \\
\hline
 & & \vec{p} = (30\cdot m + 3\cdot m\cdot V_x, 30\cdot m + 3\cdot m\cdot V_y, 3\cdot m\cdot V_z)
\end{array}$$

Como la explosión puede considerarse instantanea,resulta despreciable la influencia de las fuerzas exteriores, por lo que el momento del sistema formado por la vasija o por los tres fragmentos, se conserva. Al estar la vasija inicialmente en reposo, es nulo el momento lineal inicial del sistema, por lo que también será nulo el momento lineal del sistema después de la explosión, es decir, $\vec{p} = 0$

$$(30\cdot m + 3\cdot m\cdot V_x,\ 30\cdot m + 3\cdot m\cdot V_y,\ 3\cdot m\cdot V_z) = 0$$

que equivale al sistema de tres ecuaciones;

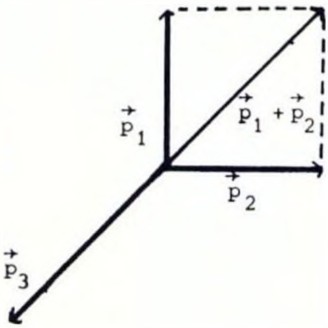
$$\left\{\begin{array}{l} 30\cdot m + 3\cdot m\cdot V_x = 0 \\ 30\cdot m + 3\cdot m\cdot V_y = 0 \\ 3\cdot m\cdot V_z = 0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} V_x = -\ 10\ \ m/s \\ V_y = -\ 10\ \ m/s \\ V_z = 0 \end{array}\right.$$

El tercer fragmento se moverá según la bisectriz que forman los vectores velocidad de los otros dos y en sentido opuesto, siendo su módulo;

$$\underline{V_3} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = \underline{14,14\ m/s}$$

Método 2

El momento lineal del sistema formado por los tres fragmentos es cero, dado que la vasija estaba inicialmente en reposo y la acción de las fuerzas exteriores es despreciable; $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$. El que sea nula la suma de tres vectores equivale a que uno cualquiera de ellos es igual a menos la suma de los otros dos; $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = -(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ (*)



De los datos; $p_1 = p_2 = m\cdot 30 = 30\cdot m$ y $p_3 = 3\cdot m\cdot V_3$. Al ser $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ perpendiculares entre sí, es facil calcular su suma aplicando la regla del paralelogramo, que en este caso es un cuadrado. Aplicando el teorema de Pitágoras, el valor de $|\vec{p}_1 + \vec{p}_2|$ es:

$$|\vec{p}_1 + \vec{p}_2| = \sqrt{p_1 + p_2} = \sqrt{2\cdot p_1} = p_1\cdot\sqrt{2} = 30\cdot m\cdot\sqrt{2} = 42,42\ m$$

De acuerdo con (*) y con la figura, la velocidad del tercer fragmento tendrá la dirección de la bisectriz del ángulo formado por las direcciones de las velocidades de las otras dos partículas y en sentido opuesto. El módulo de $\vec{V}_3$ es;

$$V_3 = \frac{p_3}{3\cdot m} = \frac{42,42\ m}{3\cdot m} = 14,14\ \ m/s$$

En ambos métodos se aplica la misma ley física, la conservación del momento lineal, aunque difieren en el desarrollo vectorial. Aunque en el "metodo 2" los cálculos se simplifican, creemos preferible el "metodo 1" al ser más general y claro. De todas formas, ambos métodos son válidos aunque las masas y/o las velocidades de los dos primeros fragmentos sean distintas, aunque $\vec{p}_3$ no tendría ya necesariamente la dirección de la bisectriz.

** 1.18 **

Septiembre 1986 - 1ª tanda - 2ª opción.

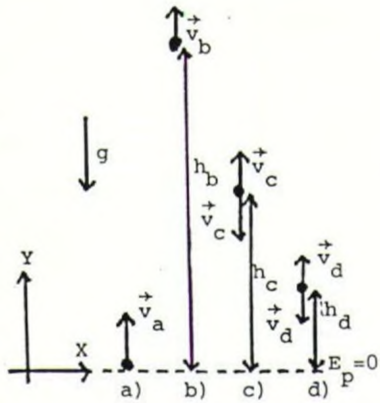
Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo de 20 Kg. con una velocidad de 50 ms^{-1}. Calcular:

a) Los valores iniciales de su energía cinética, potencial y mecánica.

b) Su energía cinética y potencial después de transcurrir 3 s. de su lanzamiento.

c) Su energía cinética y potencial cuando se encuentra a 100 m. de altura.

d) La altura del cuerpo cuando su energía cinética se reduce al 80% de su valor inicial.



a) Del contexto del enunciado se deduce que la energía potencial a la que se refiere es la energía potencial gravitatoria. En la proximidad de la superficie terrestre, esta energía viene dada por la expresión; $E_p = m\cdot g\cdot h$, donde h se mide desde una posición arbitraria, el origen de potenciales ($h = 0$, $E_p = 0$), que tomaremos en el punto de lanzamiento. (La pregunta c) parece que alude a este origen). Por ello:

La energía potencial; $E_{pa} = \underline{0}$

La energía cinética ; $E_{ca} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 50^2 = \underline{25000\ J}$.

La energía mecánica ; $E_a = E_{pa} + E_{ca} = \underline{25000\ J}$

b) Considerando que sobre el cuerpo sólo actua la fuerza gravitatoria, esta le produce una aceleración vertical y hacia abajo de valor $g = 9,8\ m/s^2$. Tomando el sistema de referencia de la figura, las ecuaciones de este movimiento son;

$$\left|\begin{array}{l} a_y = -g \\ v_y = v_0 - g\cdot t \\ y = v_0\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ll} a_y = -9,8 & \\ v_y = 50 - 9,8\cdot t & (*) \\ y = 50\cdot t - 4,9\cdot t^2 & (**) \end{array}\right.$$

Para $t = t_b = 3$, $v_{yb} = 50 - 9,8\cdot 3 = 20,6$

$h_b = y_b = 50\cdot 3 - 4,9\cdot 3^2 = 105,9$ y como $V_b = |v_{yb}|$ (la velocidad sólo tiene componente Y), resulta:

La energía cinética ; $E_{cb} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_b^2 = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 20{,}6^2 = \underline{4243{,}6\ J}$
La energía potencial; $E_{pb} = m\cdot g\cdot h_b = 20\cdot 9{,}8\cdot 105{,}9 = \underline{20756{,}4\ J}$
La energía mecánica ; $E_b = E_{pb} + E_{cb} = 4243{,}6 + 20756{,}4 = \underline{25000\ J}$

Como $E_b = E_a$, la energía mecánica se conserva lo que se deriva de suponer que sólo actúa la fuerza gravitatoria que es conservativa, es decir, se han considerado despreciables las fuerzas de rozamiento.

c) $E_{pc} = m\cdot g\cdot h_c = 20\cdot 9{,}8\cdot 100 = \underline{19600\ J}$. La energía mecánica es igual que en las situaciones anteriores ya que se conserva, $E_c = \underline{25000\ J}$, por lo que la energía cinética vale;

$$E_c = E_{pc} + E_{cc} \ ;\ E_{cc} = E_c - E_{pc} = 25000 - 19600 = \underline{5400\ J}$$

La energía cinética tambien puede calcularse en función de la velocidad, obtenida a partir de las ecuaciones de este movimiento, pero este método resulta más largo.

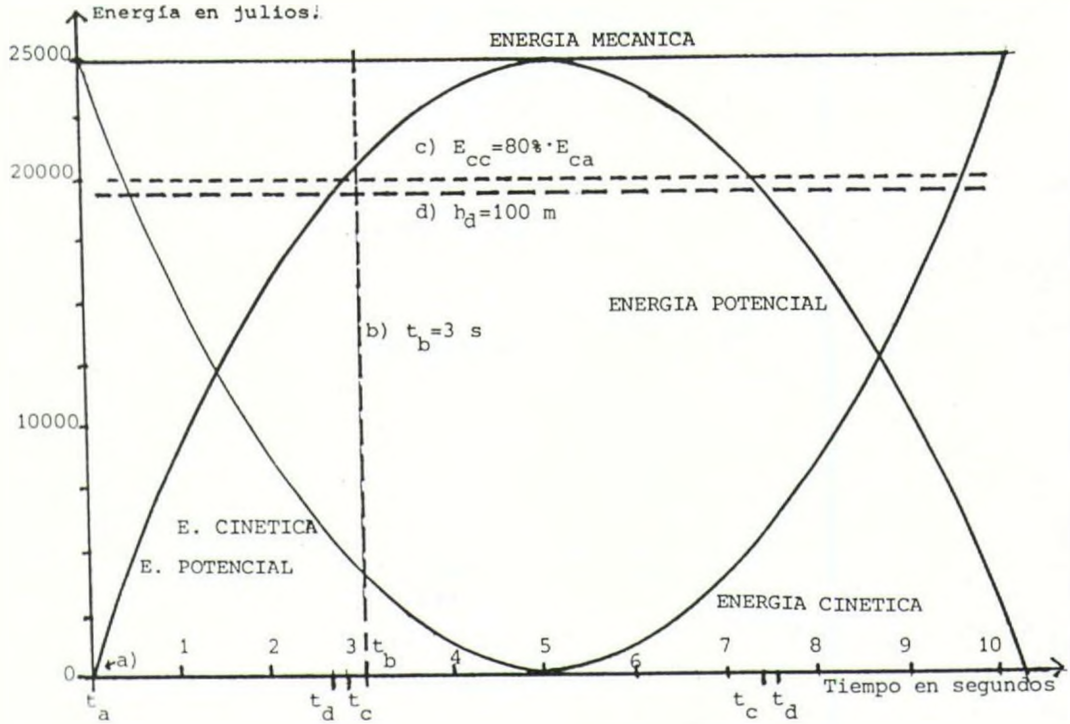
d) Si $E_{cd} = \frac{80}{100} E_{ca} = 0{,}80\cdot 25000 = 20000\ J$, de la conservación de la energía mecánica;

$$E_d = E_a \ ;\ E_{cd} + E_{pd} = E_a \ ;\ E_{pd} = E_a - E_{cd} = 25000 - 20000 = 5000\ J$$

y como $E_{pd} = m\cdot g\cdot h_d \ ;\ h_d = \frac{E_{pd}}{m\ g} = \frac{5000}{2\cdot 9{,}8} = \underline{25{,}5\ m}$

Para comprender mejor la resolución de este problema, se han representado las energias cinética, potencial y mecánica en función del tiempo; indicando las situaciones correspondientes a los cuatro apartados y de acuerdo con las expresiones:

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_y = 25000 - 9800\cdot t + 960{,}4\cdot t^2 \quad J\ (\text{si } t \text{ en s}).$$
$$E_p = m\cdot g\cdot y = 9800\cdot t - 960{,}4\cdot t^2 \quad J\ (\text{si } t \text{ en s}).$$
$$E = E_c + E_p = 25000 \quad J\ (\text{si } t \text{ en s}).$$



Energía en julios.
25000
20000
10000
0
ENERGIA MECANICA
c) E_{cc}=80%·E_{ca}
d) h_d=100 m
b) t_b=3 s
ENERGIA POTENCIAL
E. CINETICA
E. POTENCIAL
ENERGIA CINETICA
a)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
t_a t_d t_c t_b t_c t_d
Tiempo en segundos

2. DINÁMICA DE ROTACIÓN.

** 2.1 **

Julio 1983 - 2ª tanda - 1ª opción.

Un volante, cuyo momento de inercia es $I = 63,6$ Kg.m^2, gira con una velocidad angular constante $w = 31,4$ rad/s. Calcular el momento M, bajo cuya acción el volante se detiene al cabo de $t = 20$ s.

Este problema puede resolverse facilmente aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación para un sólido rígido que gira alrededor de un eje; $M = I\cdot\alpha$ (*) tomando como sentido de rotación positivo el del giro inicial. Como el momento se considerá constante, la aceleración angular tambien lo será, por lo que;

$$\alpha = (\Delta\omega)/\Delta t = (0 - 31,4)/20 = -1,57 \text{ rad/seg}^2$$

y sustituyendo valores en (*);

$$\underline{M} = I\cdot\alpha = -63,6\cdot 1,57 = \underline{-99,85 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

donde el signo menos indica que el sentido del momento es opuesto al del movimiento inicial.

Advirtamos que aunque dimensionalmente el N·m (newton ·metro) equivale al J (julio), esta última unidad se aplica a magnitudes y variables con significado energético.

** 2.2 **

Septiembre 1986 - 2ª tanda - 1ª opción.

Un disco homogéneo de 25 Kg. y 1 m. de diámetro, puede girar alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro. Se aplica una fuerza tangencial a su borde, y el disco pasa del reposo a girar a 90 rpm en 10 s., calcular el valor de la fuerza tangencial aplicada y la energía cinética del disco cuando gira a 90 rpm.

La velocidad angular final del disco es $\omega = (90\cdot 2\pi)/60 = 3\cdot\pi$rad/s
El momento de inercia del disco es es $I = \frac{1}{2}m\cdot R^2 = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot 0,5 = 3,125$
La <u>energía cinética</u>, que es de rotación, es $E_c = \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_f^2 =$

$$\tfrac{1}{2}\cdot 3,125\cdot(3\cdot\pi)^2 = 14,0625\cdot\pi^2 = \underline{138,8 \text{ J}}$$

Considerando que la fuerza tangencial aplicada es constante, el momento y la aceleración angular que produce, tambien seran constantes, por lo que

$$\alpha = (\omega_f - \omega_o)/\Delta t = 3\cdot\pi/10 = 0,3$$

y aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación;

$$M = I\cdot\alpha = 3,125\cdot 0,3\cdot\pi = 2,945$$

y al ser la fuerza tangente al disco

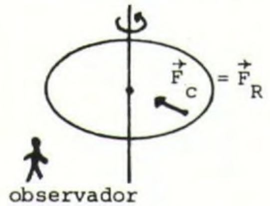
$$M = F\cdot R \quad ; \quad \underline{F} = M/R = 2,945/0,5 = \underline{5,89\ N}$$

** 2.3 **

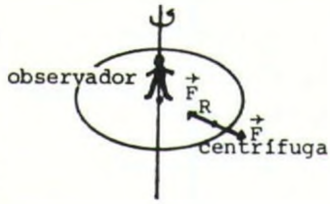
Septiembre 1983 - 1ª opción.

Un disco gira alrededor de un eje vertical a 30 r.p.m.. Sobre este disco y a 20 cm de distancia del eje de rotación se encuentra una partícula ¿Qué valor deberá tener el coeficiente de rozamiento entre la partícula y el disco para que esta no deslice, por el disco, en sentido radial? (Se supone que no existe deslizamiento tangencial)

Este problema puede plantearse desde dos puntos de vista diferentes; el de un observador en reposo y exterior al disco (sistema de referencia unido al suelo) y el de otro observador que gira con el disco (sistema no inercial respecto al suelo).



Para un observador en reposo y exterior al disco, el movimiento de la partícula será rectilíneo y uniforme si sobre ella no actúa ninguna fuerza. Como la partícula gira con el disco ha de actuar sobre ella la correspondiente fuerza centrípeta, que se la comunicará el disco por medio del rozamiento. Es decir; $\vec{F}_R$ (rozamiento) = $\vec{F}_C$ (centrípeta) = $m\cdot\omega^2\cdot R\cdot\vec{u}_C$ (*) donde $\vec{u}_C$ es un vector unitario dirigido desde la partícula al centro del disco.



Para otro observador que gira con el disco, la partícula, al no deslizar, está en reposo, por lo que la fuerza de rozamiento contrarrestará la fuerza centrífuga debida a que el sistema es no inercial respecto a nuestro sistema usual de referencia, el suelo. (*)

$\vec{F}_R + \vec{F}_{centrífuga} = 0$; $\vec{F}_R = -\vec{F}_{centrífuga} = -\ m \cdot \omega^2 \cdot R(-\vec{u}_c) = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \vec{u}_c$

Por lo tanto, ambos observadores llegan al mismo resultado, aunque mediante razonamientos distintos.

La velocidad angular $\omega = 30$ rev./min. $= 30 \cdot 2\pi/60$ rad/s $= \pi$ rad/s y la fuerza de rozamiento según (*) vale;

$$F_R = m \cdot \omega^2 \cdot R = m \cdot \pi^2 \cdot 0{,}20 = 1{,}974 \cdot m$$

El valor máximo de la fuerza de rozamiento estático viene dado por $F_m = \mu \cdot m \cdot g = 9{,}8 \cdot \mu \cdot m$ ya que el peso es la fuerza que oprime la partícula contra el disco.

$F_R \leq F_m$; $1{,}974 \cdot m \leq 9{,}8 \cdot \mu \cdot m$; $\underline{\mu \geq 0{,}201}$

** 2.4 **

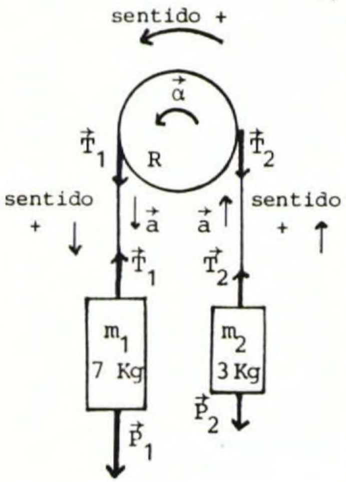
Julio 1982 - 1ª tanda - 2ª opción.

De cada extremo de una cuerda que pasa por la garganta de una polea de 0,2 cm de radio, con su eje horizontal, cuelgan dos cuerpos de 3 y 7 Kg respectivamente. El momento de inercia de la polea respecto del eje de giro es de 0,04 $kg.m^2$.

Calcúlese:

a) La aceleración lineal del movimiento del sistema.

b) El momento angular total del sistema respecto al eje de la polea cuando la velocidad de desplazamiento de los cuerpos es de 5 $m.s^{-1}$



a) Método 1.

Dado que esta pregunta nos pide la aceleración del sistema, lo más inmediato es el estudio dinámico.

En la figura hemos dibujado las fuerzas que actuan sobre los sólidos que se aceleran; los dos cuerpos y la polea. Dado que ambos cuerpos están unidos por una cuerda que consideraremos inextensible y de masa despreciable, ambos cuerpos tendrán la misma aceleración y velocidad. Si la cuerda no desliza o patina por la polea

$\alpha = a/R$ y $\omega = V/R$,(ver figura).

El efecto de esta polea fija, es variar el sentido del movimiento. Por ello tomaremos como "eje" o dirección del movimiento el de la cuerda y sentido positivo el de su aceleración, tanto para el movimiento de traslación de los cuerpos como para el de rotación de la polea.

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación a la polea;

$M = I\cdot\alpha$; $T_1\cdot R - T_2\cdot R = I\cdot\alpha = I\cdot a/R$; $T_1 - T_2 = I\cdot a/R^2$ (*)

Al aplicar la ecuación fundamental de la dinámica de traslación al movimiento de cada uno de los cuerpos, consideraremos que la fuerza resultante en el sentido de la aceleración es igual al producto de su masa por su aceleración;

$F = m\cdot a$; $P_1 - T_1 = m_1\cdot a$; $m_1\cdot g - T_1 = m_1\cdot a$ (*)

$T_2 - P_2 = m_2\cdot a$; $T_2 - m_2\cdot g = m_2\cdot a$ (*)

donde P_1 ,P_2 ,T_1 ,T_2 y a son los módulos de estas magnitudes.

Sumando las tres ecuaciones (*) se tiene;

$m_1\cdot g - m_2\cdot g = m_1\cdot a + m_2\cdot a + I\cdot a/R^2$; $(m_1 - m_2)g = \left(m_1 + m_2 + (I/R^2)\right)\cdot a$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + (I/R^2)}\cdot g = \frac{7 - 3}{7 + 3 + \left(0{,}04/(2\cdot 10^{-3})^2\right)}\cdot g = \frac{4}{10010}\cdot g =$$

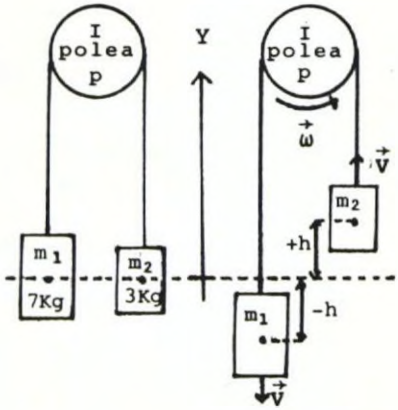
$$\underline{a = 3{,}916\cdot 10^{-3} \quad m/s^2}$$

NOTA: La resolución numérica de este problema es inusual debido al alto valor del momento de inercia de la polea; $I/R^2 >> m_1 + m_2$. Considerando la polea como un disco homogeneo de 1 cm de grosor, su masa sería de 20.000 Kg = 20 Tm , y su densidad igual a $1{,}6\cdot 10^8$ veces la del agua, que es desorbitada. Debe tratarse de una errata y el radio de la polea sería 0,2 m en lugar de 0,2 cm. Pero en un examen ha de utilizarse el dato dado, como hemos hecho aquí.

Método 2.

Esta pregunta puede resolverse por consideraciones energéticas, y hasta puede resultar más sencillo.

Consideremos que en el instante inicial (t = 0) los cuerpos estan en reposo y en las posiciones indicadas. Cualquier otra situación que verifique $V_{10} = V_{20} = \omega_0 = 0$, sería igualmente valida y nos llevaría al mismo resultado (ver figura).



SITUACION INICIAL. ⟶ SITUACION DESPUES DE t SEGUNDOS.

Al cabo de un cierto tiempo t, la situación es la indicada en la figura, donde 1 y 2 se refiere a los cuerpos y p a la polea.

Si los rozamientos son despreciables, la energía total se conserva:

$$\Delta E_{c1} + \Delta E_{c2} + \Delta E_{cp} + \Delta E_{p1} + \Delta E_{p2} + \Delta E_{pp} = 0$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 \cdot V^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \cdot V^2 + \tfrac{1}{2} I \cdot \omega^2 + m_1 \cdot g \cdot (-h) + m_2 \cdot g \cdot h = 0$$

Como $\omega^2 = (V/R)^2 = V^2/R^2$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) \cdot V^2 + (m_2 - m_1) \cdot g \cdot h = 0 \qquad V^2 = \frac{2 \cdot (m_1 - m_2) \cdot g \cdot h}{m_1 + m_2 + (I/R^2)} =$$

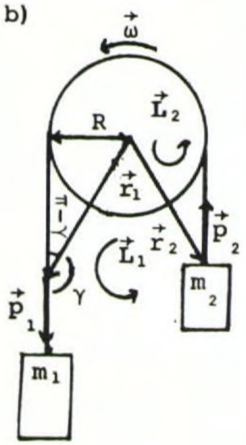
$$V^2 = 2 \cdot (7 - 3) \cdot 9{,}8 \cdot h \,/\, 10010 = 7{,}8322 \cdot 10^{-3} \cdot h$$

Considerando ahora el movimiento del cuerpo dos en el instante t, cuya dirección y sentido es el del semieje Y positivo, tenemos;

$$\left| \begin{array}{l} V = a \cdot t \\ h = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} t = V/a \\ h = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (V/a)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot V^2/a \end{array} \right.$$

y despejando la aceleración; $\underline{a} = \tfrac{1}{2} \cdot V^2/h = \tfrac{1}{2} \cdot 7{,}8322 \cdot 10^{-3} = \underline{3{,}916 \cdot 10^{-3}\ m/s^2}$

b)



El momento angular del cuerpo 1 es; $\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times m_1 \cdot \vec{V}$, perpendicular al plano del dibujo , positivo o antihorario y de módulo $L_1 = r_1 \cdot m_1 \cdot V \cdot \text{sen}\gamma = m_1 \cdot V \cdot r_1 \cdot \text{sen}(\pi - \gamma) = m_1 \cdot V \cdot R$

Análogamente, $\vec{L}_2$ tiene igual dirección y sentido que $\vec{L}_1$ y su modulo es $L_2 = m_2 \cdot V \cdot R$

El momento angular de la polea es de igual dirección y sentido que el de los cuerpos y su valor es $L_p = I \cdot \omega = I_p \cdot V/R$.

El momento angular del sistema vale;

$$L = L_1 + L_2 + L_p = (m_1 \cdot R + m_2 \cdot R + I_p/R)\ V =$$

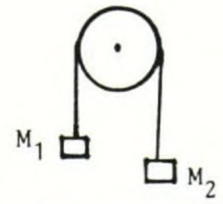
$$\left(2 \cdot 10^{-2} + (0{,}04/2 \cdot 10^{-2})\right) \cdot 5 = \underline{100{,}1\ Kg \cdot m^2/s}$$

Puede observarse que esta pregunta b) es independiente de la a).

** 2.5 **

Junio 1989 - 1ª tanda - obligatoria - 1ª opción - problema 1

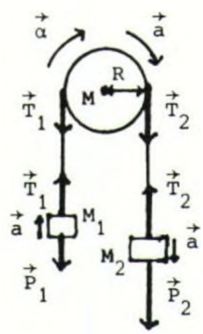
En la Fig. se observa una polea de $M = 20$ Kg y $R = 0.2$ m, que tiene arrollada una cuerda de masa despreciable, de la que penden las masas $M_1 = 5$ Kg y $M_2 = 10$ Kg. Sabiendo que el momento e inercia de la polea respecto a su eje de giro es $MR^2/2$, determinar las aceleraciones con que se mueven las masas.



Este problema es similar al anterior (apartado a) y al igual que él puede resolverse por consideraciones energéticas y dinámicas, siendo este segundo método el más inmediato ya que nos piden determinar las aceleraciones del sistema. Si en el problema anterior tuvo que mirar las soluciones, inténtelo con éste y si encuentra dificultades, trate de superarlas consultando la solución del problema anterior. ¡Animo!.

Metodo 1

Para aplicar las leyes de la dinámica , advirtamos que sobre las masas M_1 y M_2 actuan, respectivamente, sus pesos P_1 y P_2 y las tensiones ejercidas por la cuerda sobre ellas, T_1 y T_2. Al ser $P_2 > P_1$, la masa 2 se deslizará hacia abajo y la masa 1 hacia arriba y como la cuerda ha de acelerar la polea, T_1 y T_2 no serán iguales.



Escribiremos las ecuaciones de la dinámica de traslación de cada masa tomando como positivas las fuerzas en el sentido de la fuerza resultante sobre cada masa que coincide con el de su aceleración.Al escribir la ecuación de la dinámica de rotación para la polea tomaremos como sentido positivo el del momento resultante que coincide con el de la aceleración angular. Dado que la cuerda es inextensible, el valor de las aceleraciones de ambas masas es el mismo y se relaciona con el de la aceleración angular de la polea por $a = \alpha \cdot R$, si de acuerdo con la figura dada, la cuerda se apoya en la periferia de la polea.

$$\left|\begin{array}{l} P_2 - T_2 = M_2\cdot a \\ T_1 - P_1 = M_1\cdot a \\ T_2\cdot R - T_1\cdot R = I\cdot\alpha \end{array}\right. \qquad T_2 - T_1 = \frac{I}{R}\cdot\frac{a}{R} = \frac{M\cdot R^2/2}{R}\cdot\frac{a}{R} \qquad \begin{array}{r|l} & M_2\cdot g - T_2 = M_2\cdot a \\ (*) & T_1 - M_1\cdot g = M_1\cdot a \\ + & T_2 - T_1 = \frac{M\cdot a}{2} \end{array}$$

$$(M_2 - M_1)\cdot g = (M_1 + M_2 + \frac{M}{2})\cdot a$$

$$\underline{a} = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2 + M/2}\, g = \frac{10 - 5}{5 + 10 + 20/2}\, 9,8 = \underline{1,96 \text{ m/s}}$$

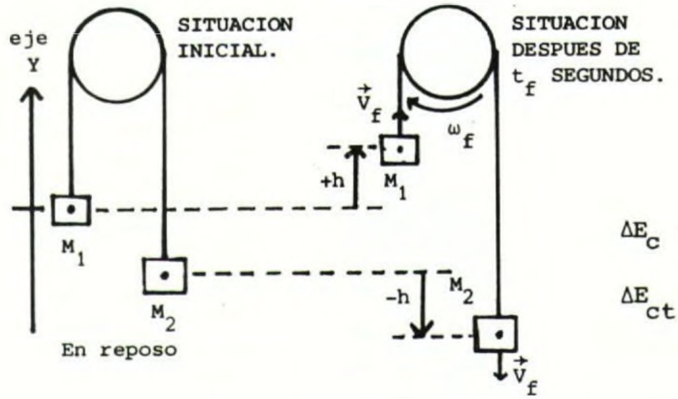
Esta es la aceleración de las masas que penden, la de la polea no nos la piden. Obsérvese que en este problema, la aceleración es independiente del radio de la polea. No todos los datos son necesarios siempre para resolver el problema.

Es interesante obtener los valores de T_1 y T_2 sustituyendo valores en las dos primeras ecuaciones ($T_1 = 58,8N, T_2 = 78,4N$) y los valores de P_1 y P_2 ($P_1 = 49$ N, $P_2 = 98$ N). Ahora puede observarse como la fuerza tractora P_2 del mismo sentido que la aceleración del sistema, acelera la masa M_2 y a través de la cuerda se transmite su acción al resto del sistema (T_2), se acelera la polea y se ejerce una fuerza T_1 sobre M_1 que además de contrarrestar su peso la acelera, verificándose $P_2 > T_2 > T_1 > P_1$

Método 2

Para resolver este problema por consideraciones energéticas, suponemos que la masa M_2 ha descendido una altura h (h se considera positivo) en un tiempo t_f, partiendo del reposo y adquiriendo una velocidad V_f. Como la cuerda es inextensible esta es la misma velcidad que ha adquirido la masa M_1, mientras asciende una altura h. Como la cuerda descansa en la periferia de la polea y arrastra a ésta en su movimiento, no desliza; $\omega_f = V_f\cdot R$

Para que la cuerda arrastre en su movimiento a la polea, ésta ha de rozar con la polea, pero no se producen pérdidas por rozamiento ya que la cuerda no desliza por la polea, no se mueve respecto de ella. Considerando despreciable los rozamientos en el eje de la polea, la energía se conserva, por lo que el aumento de la energía cinética de traslación se verifica a expensas de la energía potencial gravitatoria terrestre.



$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

$$\Delta E_{ct} + \Delta E_{cr} + \Delta E_p = 0$$

$$\frac{1}{2}\cdot M_1\cdot V_f^2 + \frac{1}{2}\cdot M_2\cdot V_f^2 + \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_f^2 + M_1\cdot g\cdot(+h) + M_2\cdot g\cdot(-h) = 0$$

Como $\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_f^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{M\cdot R^2}{2}\cdot\left(\frac{V_f}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot M\cdot V_f^2$ sustituyendo y operando,

se tiene; $\left(\frac{M_1}{2} + \frac{M_2}{2} + \frac{M}{4}\right)\cdot V_f^2 = (\ M_2 - M_1\ )\cdot g\cdot h$

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{10}{2} + \frac{20}{4}\right)\cdot V_f^2 = (10 - 5)\cdot 9{,}8\cdot h \ ; \quad 12{,}5\cdot V_f^2 = 49\cdot h\ ; \quad V_f = 3{,}92\cdot h$$

Para calcular la aceleración, a, estudiemos el movimiento de la masa M_1, tomandose el semieje Y positivo en la dirección-sentido de dicho movimiento y su origen en la posición inicial de M_1. Las ecuaciones del movimiento son;

$$\left|\begin{array}{l} a = \text{constante} \\ V = a\cdot t \\ y = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \end{array}\right. \quad \text{al transcurrir un tiempo } t_f \ ; \quad \left|\begin{array}{ll} V_f = a\cdot t_f & (+) \\ y_f = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t_f^2 & (++) \end{array}\right.$$

despejando t_f en (+), $t_f = V_f/a$, y sustituyendolo en (++) ;

$$h = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{V_f}{a}\right)^2 \ ; \ h = \frac{e\cdot V_f^2}{2\cdot a} \ ; \quad \underline{a} = \frac{V_f}{2\cdot h} = \frac{3{,}92\cdot h}{2\cdot h} = \underline{1{,}96 \text{ m/s}}$$

Esta última parte del problema puede resolverse estudiando el movimiento de M_2, obteniéndose las mismas ecuaciones si el semieje Y positivo se toma en sentido opuesto al anterior, es decir, en el del movimiento de la masa ahora en estudio, M_2. Pero si mantenemos el semieje Y positivo en el sentido del movimiento de M_1, ahora $y_f = -h$, $V = -\ V_f$ obteniéndose para a el mismo valor pero con signo menos, ya que su sentido es opuesto al del semieje Y positivo.

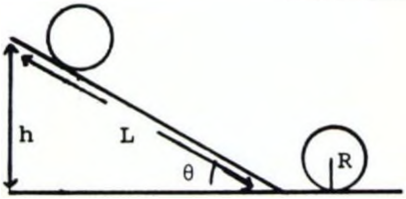
** 2.6 **

Junio 1984 - 2ª tanda - 1ª opción.

Por un plano inclinado, se abandonan simultáneamente una esfera y un cilindro de igual masa e igual radio. Supuestas idénticas las condiciones iniciales ¿Cuál llegará antes al final del plano?

Supuesto el plano de longitud L, calcular el tiempo que tardaran el cilindro y la esfera en recorrerlo.

<u>Método 1.</u>



Supondremos que los dos cuerpos ruedan sin deslizar ($V = \omega \cdot R$), y que las perdidas por rozamiento que serían debidas al rozamiento por rodadura, son despreciables, por lo que la energía se conserva:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \;; \qquad \Delta E_c = -\,\Delta E_p = m \cdot g \cdot h \qquad (*)$$

donde h es la altura que descienden. Como los cuerpos parten del reposo, el incremento de energía cinética coincide con la energía cinética en ese punto que es igual a la suma de las energías cinéticas de traslación y rotación:

$$\Delta E_c = E_c = E_{ct} + E_{cr} = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \tfrac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \tfrac{1}{2} \cdot I \cdot (V/R)^2 =$$

$= \tfrac{1}{2} \cdot V^2 \cdot (m + I/R^2)$ e igualando con (*) se tiene;

$$\tfrac{1}{2} \cdot V^2 \cdot (m + I/R^2) = m \cdot g \cdot h \;; \qquad V^2 = 2 \cdot m \cdot g \cdot h / (m + I/R^2)$$

$$V = \left(2 \cdot m \cdot g \cdot h \;/\; (m + I/R^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para la esfera; $I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$; $V_{be} = \left(2 \cdot m \cdot g \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta / (m + \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 / R^2)\right)^{\frac{1}{2}} =$

$$= \left(2 \cdot g \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta / (7/5)\right)^{\frac{1}{2}} = (10 \cdot g \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta / 7)^{\frac{1}{2}} \qquad (**)$$

Para el cilindro; $I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$; $V_{bc} = \left(2 \cdot m \cdot g \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta / (m + \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 / R^2)\right)^{\frac{1}{2}} =$

$$= \left(2 \cdot g \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta / (3/2)\right)^{\frac{1}{2}} = (4 \cdot g \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta / 3)^{\frac{1}{2}} \qquad (***)$$

Como $V_{be} > V_{bc}$, es decir, $(10/7)^{\frac{1}{2}} > (4/3)^{\frac{1}{2}}$ ó $1{,}20 > 1{,}115$, la velocidad de la esfera al final del plano, y tambien en cualquier punto intermedio, es mayor que la del cilindro, por lo cual la esfera es la que llega primero.

La segunda pregunta es una formulación cuantitativa de la primera. Al ser constantes las fuerzas que actuan sobre el centro de masa de los cuerpos, la aceleración de su C.M. será constante y su movimiento rectilíneo uniforme. Tomando el eje del movimiento en la dirección del plano inclinado y hacia abajo, se escribe;

$$\left| \begin{array}{l} a = cte. \\ V = a\cdot t \\ s = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \end{array} \right. \quad \text{y en la base del plano} \quad \left| \begin{array}{l} V_b = a\cdot t_b;\ a = V_b/t_b \\ L = \frac{1}{2}\,\frac{V_b}{t_b}\,t_b^2 = \frac{1}{2}\cdot V_b\cdot t_b \end{array} \right.$$

y $t_b = 2\cdot L/V_b$ y sustituyendo en esta expresión los valores de V_b, (**) y (***), tenemos:

Para la esfera;

$$t_e = 2\cdot L/V_{be} = 2\cdot L\cdot(7\cdot m/10\cdot g\cdot L\cdot sen\theta)^{\frac{1}{2}} = \underline{(14\ L/5\cdot g\cdot sen\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

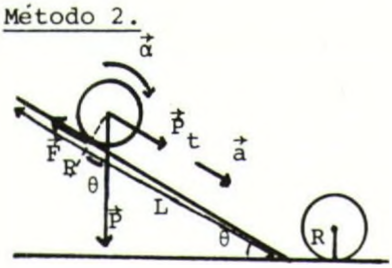
y para el cilindro;

$$t_c = 2\cdot L/V_{bc} = 2\cdot L\cdot(3\cdot m/4\cdot g\cdot L\cdot sen\theta)^{\frac{1}{2}} = \underline{(3\cdot L/g\cdot sen\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

Como $\sqrt{14/5} < \sqrt{3}$, es decir, $1{,}67 < 1{,}73$, el tiempo empleado por la esfera en llegar al final del plano es menor.

Puede comprobarse que los resultados dependen de la inclinación del plano, ya que para una misma longitud de este, al aumentar θ sin ser mayor que $\pi/2$, la altura de la que descienden los cuerpos aumentará, aumentando igualmente la velocidad de los cuerpos en cada punto del plano. V depende directamente de $(sen\theta)^{\frac{1}{2}}$, y disminuirá el tiempo empleado en recorrerlo ya que éste depende inversamente de $(sen\theta)^{\frac{1}{2}}$.

Método 2.



Estudiemos ahora, las fuerzas que actúan sobre el cilindro y sobre la esfera. Sobre sus centros de masa actúa su peso, $\vec{P}$, cuya componente tangencial $\vec{P}_t = m\cdot g\cdot sen\theta$, los acelera hacia abajo, mientras que la fuerza de rozamiento al deslizamiento $\vec{F}_R$, que actúa sobre el punto en contacto con el plano, impide que estos cuerpos deslicen y provoca su rotación. Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación, se tiene; $|\vec{M}| = F_R\cdot R = I\cdot\alpha = I\cdot a/R$; $F_R = I\cdot a/R^2$ ya que $\alpha = a/R$ al no deslizar ambos cuerpos.

Señalemos que la fuerza de rozamiento impide que el punto de la esfera o del cilindro en contacto con el suelo, deslice, por lo que al no desplazarse no hay trabajo de rozamiento por deslizamiento. Por lo tanto, la existencia de fuerzas de rozamiento, no implica siempre una pérdida de energía. Sin embargo, al rodar, hay perdidas de energía debido al rozamiento de rodadura, que en este problema hemos considerado despreciables.

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación al movimiento del centro de masa del cuerpo que rueda, tenemos; $F = m \cdot a$; $P_t - F_R = m \cdot a$; $m \cdot g \cdot \text{sen}\theta - I \cdot a/R^2 = m \cdot a$

$$a = m \cdot g \cdot \text{sen}\theta/(m + I/R^2)$$

Para la esfera;

$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R$; $\underline{a_e} = m \cdot g \cdot \text{sen}\theta/(m + \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2/R^2) = g \cdot \text{sen}\theta/(7/5) = \underline{5 \cdot g \cdot \text{sen}\theta/7}$

Para el cilindro;

$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R$; $\underline{a_c} = m \cdot g \cdot \text{sen}\theta/(m + \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2/R^2) = g \cdot \text{sen}\theta/(3/2) = \underline{2 \cdot g \cdot \text{sen}\theta/3}$

por lo que la esfera llega antes, al ser mayor su aceleración, $5/7 > 2/3$ ó $0,71 > 0,67$.

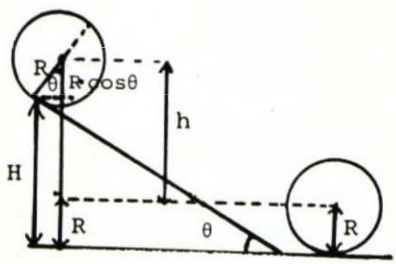
Para calcular el tiempo empleado, escribimos la ecuación de su movimiento; $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$, y al llegar a la base del plano; $t = t_b$ y $s = L$, por lo que $L = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ y $t_b = (2 \cdot L/a)^{\frac{1}{2}}$

Para la esfera; $t_e = \left[2 \cdot L/(5 \cdot g \cdot \text{sen}\theta/7)\right]^{\frac{1}{2}} = \underline{(14/5)^{\frac{1}{2}} \cdot (L/g \cdot \text{sen}\theta)^{\frac{1}{2}}}$

Para el cilindro; $t_c = \left[2 \cdot L/(2 \cdot g \cdot \text{sen}\theta/3)\right]^{\frac{1}{2}} = \underline{\sqrt{3}\ (L/g \cdot \text{sen}\theta)^{\frac{1}{2}}}$

llegando antes la esfera, pues $t_e > t_c$ ($\sqrt{14/5} > \sqrt{3}$ ó $1,67 > 1,73$)

NOTA.



Para una variación de altura H ($H = L \cdot \text{sen}\theta$) medida desde el punto de contacto del cuerpo con el plano, la variación de altura que experimenta el centro de gravedad del cuerpo no es H sino $h = H + R \cdot \cos\theta - R = H - R \cdot (1 - \cos\theta)$ por lo que si $R << H$ puede considerarse $h = H$. (Observese que para $\theta = 15^{\circ}$, $h = H - 0,03 \cdot R$, si $\theta = 30$, $h = H - 0,13 \cdot R$ y para $\theta = 45$, $h = H - 0,29 \cdot R$). Como en este problema el enunciado no da como dato el radio, lo hemos supuesto despreciable frente a $H/(1 - \cos\theta)$ o frente a $L \cdot \text{sen}\theta/(1 - \cos\theta)$.

** 2.7 **

Septiembre 1981 - 1ª tanda - 1ª opción.

Dos cilindros de igual radio, pero cuyas masas son de 5 y 10 Kg respectivamente, se dejan caer simultáneamente rodando sin deslizamiento, a lo largo de un plano inclinado 30^{o}, desde una altura de 1 m sobre la horizontal. Se desea saber:

a) Cuál llegará a la base con mayor energía y cuanto vale.

b) Cuál llega antes.

Como los cilindros "se dejan caer", su velocidad y energía cinética iniciales son nulas, por lo que al descender cada uno de ellos una altura h (h se considera positiva, $\Delta h=-h$) $E_c = \Delta E_c$, y teniendo en cuenta la conservación de la energía, al considerarse despreciables las perdidas por rozamiento;

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \quad ; \quad E_c + \Delta E_p = 0$$

$$E_c = -\Delta E_p = -m\cdot g\cdot \Delta h = -\ m\cdot g\cdot(-h) = m\cdot g\cdot h \qquad (*)$$

En la base del plano, la energía cinética del cilindro de 10 Kg vale $E_c = 10\cdot 9{,}8\cdot 1 = \underline{98\ J}$ que es mayor que la del de 5 Kg, de valor $E_c = 5\cdot 9{,}8\cdot 1 = 49$ J pues la energía cinética con la que llegan es proporcional a la masa.

Si en la pregunta a), "energía" se interpreta como "energía total", ésta sería la suma de la energía cinética y la energía potencial que también es proporcional a la masa, por lo que sigue siendo mayor la del cilindro de mayor masa, el de 10 Kg. Su valor depende del origen tomado para la energía potencial,y si se toma en la base del plano, en esta posición la energía total del cilindro coincide con su energía cinética.

Hemos supuesto que la altura h se mide desde el centro de masa de los cilindros. Si se hiciera desde el punto de contacto de los cilindros con la base, h sería (ver nota en el problema 2.6); $h = H - R\cdot(1 - \cos\theta) = 1 - 0{,}13\cdot R$ (R es el radio de cada cilindro) que es aproximadamente igual a 1 m , si $R \ll 1$ m.

Esta pregunta también puede resolverse calculando el trabajo de rotación y traslación efectuado sobre cada uno de los cilindros, aunque este método resulta más complicado.

b) La energía cinética de cada cilindro es la suma de sus energías cinéticas de traslación y de rotación, verificandose $V = \omega \cdot R$, al rodar sin deslizar:

$$E_c = E_{ct} + E_{cr} = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \tfrac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot (V/R)^2 = \frac{3}{4}\, m \cdot V^2$$

e igualando con (*) $\frac{3}{4}\, m \cdot V^2 = m \cdot g \cdot h \quad ; \; V^2 = 4 \cdot g \cdot h/3$

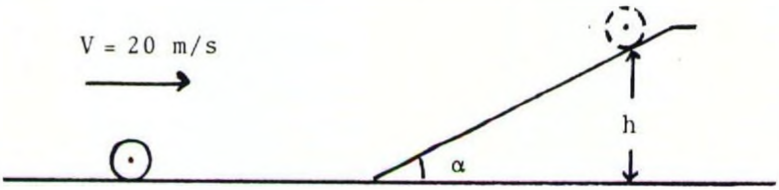
por lo que los dos cilindros llegan al mismo tiempo pues su velocidad en cada punto del plano es la misma al no depender de la masa.

Esta pregunta tambien puede resolverse calculando la aceleración del C.M. de cada cilindro , escribiendo la ecuación de su movimiento y a partir de ésta, el tiempo que tarda en llegar a la base de modo similar al empleado en el problema 2.5. Pero dada la pregunta concreta del problema, este método requiere muchos más cálculos que el empleado.

** 2.8 **

Junio 1987 - 1ª tanda - 1ª opción.

Como se muestra en la figura, una esfera sólida y uniforme de 1 Kg, rueda sobre una superficie horizontal a 20 m/s. Después rueda hacia arriba sobre un plano inclinado, como se muestra. Si las perdidas debidas al rozamiento son despreciables, ¿Cuál será el valor de h en el lugar donde se detiene la esfera? ¿Cuál es la energía cinética de la bola antes de iniciar la subida por el plano?. (Dato: Momento de inercia de la esfera, respecto a un eje que pasa por su centro = $(2/5)MR^2$).



Supondremos que la esfera rueda sin deslizar, por lo que $V = \omega \cdot R$, donde V es la velocidad de su C.M., ω su velocidad angular y R su radio.

2a pregunta.

La energía cinética de la esfera antes de iniciar la subida por el plano, E_{co}, es la suma de sus energías cinéticas de traslación y de rotación:

$$E_{co} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot V_o^2 + \frac{1}{2}\cdot I\cdot \omega_o^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot V_o^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot m\cdot R^2\cdot(V_o/R)^2 =$$

$$= \frac{7}{10}\cdot m\cdot V_o^2 = 0,7\cdot 1\cdot 20^2 = \underline{280}\ J$$

1a pregunta.

Método 1. Por consideraciones energéticas.

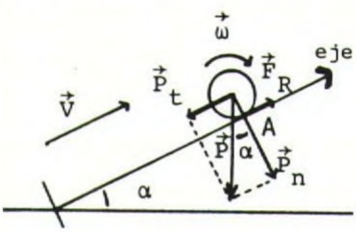
Al detenerse la esfera su velocidad y su energía cinética serán nulas, por lo que su energía cinética inicial, E_{co}, se ha transformado en energía potencial, al conservarse la energía ya que las perdidas por rozamiento son despreciables.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \ ; \quad -E_{co} + m\cdot g\cdot h = 0 \ ; \ \underline{h} = E_{co}/(m\cdot g) = 280/(1\cdot 9,8) = \underline{28,6\ m}$$

El incremento de altura que experimenta el C.M. de la esfera no es h sino $h - (1-\cos\alpha)\cdot R$ que consideramos aproximadamente igual a h, al suponerse que el radio de la esfera es lo suficientemente pequeño ya que no se da como dato. (Ver nota en el problema 2.6)

Método 2. Por consideraciones dinámicas.

Aunque este método es algo más complejo, nos descubre algunos aspectos interesantes del problema. Cuando la componente tangencial del peso, $P_t = m\cdot g\cdot \operatorname{sen}\alpha$ trata de hacer deslizar el cuerpo sobre el plano inclinado, surge una fuerza de rozamiento, $\vec{F}_R$, que trata de impedir, e impide en este caso, que el punto A de contacto de la esfera con el plano, deslice. Pero como $\vec{P}_t$ trata de acelerar la esfera hacia abajo, la fuerza de rozamiento se opone a que el punto A deslice hacia abajo, por lo que el sentido de $\vec{F}_R$ será hacia arriba. Obsérvese que en este caso el C.M. de la esfera se mueve hacia arriba y su velocidad y $\vec{F}_R$ tienen el mismo sentido. Recuérdese que la fuerza de rozamiento al deslizamiento se opone al movimiento de la parte del cuerpo que desliza o trata de deslizar (el punto A en nuestro caso) que no coincide siempre con el movimiento del C.M.



Señalemos también que aunque actúen fuerzas de rozamiento apreciables sobre un cuerpo que rueda sin deslizar, no hay trabajo de rozamiento por deslizamiento al no desplazarse el punto A de contacto del cuerpo con la superficie sobre la que rueda. Si puede haber trabajo de rozamiento debido al rozamiento de rodadura que el enunciado de este problema supone despreciable.

Según la ecuación de la dinámica de rotación $M = I \cdot \alpha$ siendo M el momento que la fuerza de rozamiento comunica a la esfera (tiene la dirección del eje de giro) y α es la aceleración angular de la esfera (no confundir con el ángulo α de la figura). Si a es la aceleración del C.M. de la esfera, $a = \alpha \cdot R$, y

$$F_R \cdot R = I \cdot \alpha = (\frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2) \cdot (\frac{a}{R}) \quad ; \quad F_R = \frac{2}{5} \cdot m \cdot a$$

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica al movimiento del C.M. de la esfera, siendo la fuerza resultante y la aceleración hacia abajo del plano (P_t, F_R y a indican los módulos), tenemos:

$$P_t - F_R = m \cdot a \ ; \ m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\alpha - \frac{2}{5} \cdot m \cdot a = m \cdot a \ ; \ \frac{7}{5} \cdot m \cdot a = m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$a = \frac{5}{7} \cdot g \cdot \operatorname{sen}\alpha = 7 \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Para resolver el problema cinemático, tomaremos el origen de coordenadas en la base del plano, el eje del movimiento en la dirección del plano y el sentido positivo hacia arriba, por lo que la velocidad inicial será positiva y la aceleración negativa:

$$\left| \begin{array}{l} a = 7 \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ V = 20 - 7 \cdot t \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ s = 20 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot t^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{array} \right. \quad \text{en el punto más alto} \quad \left| \begin{array}{l} t = t_f \\ V = 0 \\ s = h/\operatorname{sen}\alpha \end{array} \right. \quad \text{es decir;}$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 = 20 - 7 \cdot t_f \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} = 20 \cdot t_f - 3,5 \cdot t_f \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} t_f = 2,86/\operatorname{sen}\alpha \\ \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} = 20 \cdot \frac{2,86}{\operatorname{sen}\alpha} - 3,5 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot (\frac{2,86}{\operatorname{sen}\alpha})^2 \end{array} \right.$$

$h/\operatorname{sen}\alpha = 28,6/\operatorname{sen}\alpha$;es decir $\underline{h = 28,6 \text{ m}}$

Como era de esperar, los resultados obtenidos mediante los dos métodos coinciden.

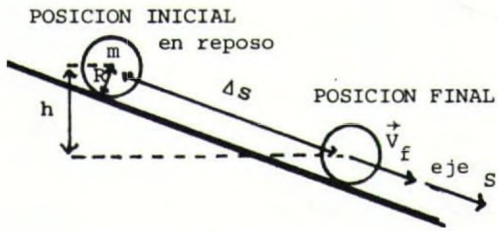
** 2.9 **

Junio 1989 - 1ª tanda - optativa - 1ª opción - problema 1

Una esfera de 0.1 Kg y 5 x 10^{-2} m de radio, rueda sin deslizar sobre un plano inclinado 30^o con respecto a la horizontal. Determinar cuanto tiempo tardará en recorrer 1 m sobre el plano inclinado, partiendo del reposo. (Momento de inercia de una esfera respecto a un eje que pasa por su centro: $2MR^2/5$).

Este problema es similar al anterior aunque varíen ligeramente los datos , las preguntas y la expresión del momento de inercia del cuerpo sea diferente. Como los anteriores problemas puede resolverse por consideraciones energéticas (método 1) y dinámicas (método 2).

El movimiento del C.M. de la esfera es en la dirección del plano inclinado y hacia abajo, por lo que consideraremos la componente de las fuerzas, aceleración y velocidades en dicha dirección y posititivas hacia abajo.



Método 1.

Al despreciarse el rozamiento por rodadura, la energía de la esfera se conserva, pues sobre un cuerpo que rueda sin deslizar no hay trabajo de rozamiento aunque la fuerza de rozamiento sea apreciable, ya que el punto de contacto de la esfera con el plano permanece en reposo, no se desplaza.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \quad ; \qquad \Delta E_c = - \Delta E_p$$

Es decir, el incremento de energía cinética es igual a la disminución de energía potencial, siendo $-\Delta E_p = m \cdot g \cdot h$, donde h es la altura descendida; $h = \Delta s \cdot \text{sen}30^o = 1 \cdot 0,5 = 0,5$. Al partir la esfera del reposo, $\Delta E_c = E_{cf}$ o energía cinética final que incluye la de traslación del C.M. y la de rotación alrededor de un eje que pasa por él;

$$E_{cf} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_f^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot m \cdot R^2}{5} \cdot \left(\frac{V_f}{R} \right)^2 = \frac{7}{10} \cdot m \cdot V_f^2$$

ya que como rueda sin deslizar, la velocidad de su C.M., $V_f = \omega_f \cdot R$, siendo R el radio de la esfera.

$$E_{cf} = -\Delta E_p \quad ; \quad \frac{7}{10}\cdot m\cdot V_f^2 = m\cdot g\cdot h \quad ; \quad V_f^2 = \frac{10}{7}\cdot g\cdot h = \frac{10}{7}\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5 = 7$$

$$V_f = 2{,}646 \text{ m/s}$$

Para calcular el tiempo empleado ha de resolverse un pequeño ejercicio de cinemática,para lo que tomaremos el sistema de referencia indicado en la figura (el origen en la posición inicial del C.M de la esfera) y escribiremos las ecuaciones del movimiento, es decir, las de la componente S;

$$a = \text{constante} \qquad (*)\ V = a\cdot t \qquad (**)\ s = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$$

y despejando a en (*) y sustituyendolo en (**) se tiene;

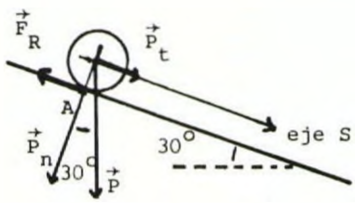
$$s = \frac{1}{2}\cdot\frac{V}{t}\cdot t^2 = \frac{V\cdot t}{2} \quad ; \quad t = \frac{2\cdot s}{V}$$

y cuando recorre 1 metro;

$$\underline{t_f} = \frac{2.s_f}{V_f} = \frac{2\cdot 1}{2{,}646} = \underline{0{,}756 \text{ segundos}}$$

Método 2.

El movimiento de la esfera podemos descomponerlo para su estudio en dos; uno de traslación de su C.M. y otro de rotación alrededor de un eje que pasa por su C.M. Al rodar sin deslizar se verifica que $a = \alpha\cdot R$, siendo "a" la aceleración de traslación y "α" la de rotación.



Sobre el C.M. de la esfera actúa su peso que lo descompondremos en la componente en el sentido del movimiento (eje S), $P_t = P\cdot \text{sen}30^o = m\cdot g\cdot \text{sen}30^o$,y en la componente normal, $P_n = P\cdot \cos 30^o = m\cdot g\cdot \cos 30^o$; y la fuerza de rozamiento, F_R, aplicada en el punto A de contacto de la esfera con el plano y que produce un momento respecto del eje de giro $M = F_R\cdot R$. Este es el único momento respecto del eje de giro pues el debido al peso es nulo ya que se aplica en un punto de dicho eje, el C.M.

La ecuación de la dinámica de rotación es;

$$M = I\cdot\alpha \quad ; \quad F_R\cdot R = I\cdot\alpha = \frac{2}{5}\cdot m\cdot R^2\cdot\frac{a}{R} = \frac{2}{5}\ m\cdot a\cdot R \quad (*)$$

adviértase que "M" es el momento y "m" la masa.

La ecuación de la dinámica de traslación es;

$F_{\text{resultante en la dirección del plano}} = m \cdot a$; $P_t - F_R = m \cdot a$ (**)

Despejando F_R en (*) y sustituyéndolo en (**), se tiene;

$$P_t - \frac{2}{5} \cdot m \cdot a \cdot R = m \cdot a \; ; \; m \cdot g \cdot \text{sen}30^{\circ} - \frac{2}{5} \cdot m \cdot a = m \cdot a$$

$$a = \frac{5 \cdot g \cdot \text{sen}30^{\circ}}{7} = 3{,}5 \text{ m/s}$$

Para calcular el tiempo que tarda en descender 1 m, escribimos la componente S de las ecuaciones de su movimiento, respecto al sistema de referencia de la figura cuyo origen se toma en la posición inicial del C.M. de la esfera

$$a = \text{constante} \qquad V = a \cdot t \qquad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

y como para $t = t_f$, $s = 1$ metro, tenemos;

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot t_f^2 \; ; \; \underline{t_f} = \sqrt{\frac{2}{3{,}5}} = 0{,}756 \; \underline{\text{segundos}}$$

Recordemos una vez más, que para que un cuerpo ruede, el rozamiento por deslizamiento entre el cuerpo y la superficie, no puede ser despreciable. En este problema, la fuerza de rozamiento es, según (*);

$$F_R = \frac{2}{5} \cdot m \cdot a = \frac{2}{5} \cdot m \cdot 3{,}5 = 1{,}4 \text{ m} \qquad (\&)$$

Si la esfera no desliza, es que la fuerza de rozamiento estático por deslizamiento en el punto de contacto, no supera su valor maximo, F_{em} ;

$$F_{em} = \mu \cdot P_n = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^{\circ} = 8{,}45 \cdot \mu \cdot m$$

que ha de ser mayor que la fuerza de rozamiento F_R, dada por (&), necesaria para que la esfera ruede sin deslizar.

$$8{,}45 \cdot \mu \cdot m \geq 1{,}4 \text{ m} \quad ; \quad \mu \geq 0{,}17$$

valor usual en otros problemas y que supondría una pérdida de energía apreciable si el cuerpo no tuviese forma esférica y deslizara. Pero en este caso , no hay perdida de energía por rozamiento (si se consideran despreciables las debidas al rozamiento de rodadura) dado que el punto de la esfera en contacto con el plano no desliza. Por ello, el descubrimiento de la rueda es uno de los grandes logros técnicos de la humanidad.

** 2.10 **

Junio 1989 - 1ª tanda - optativa - 2ª opción - problema 1

Un motor de automóvil produce una energía de 2×10^6 J por Km. Se diseña un coche capaz de utilizar la energía almacenada en un volante contenido en un recipiente al vacio. Si la masa del volante es de 100 Kg y gira con una velocidad de 400 r.p.s, calcular el menor valor del radio del volante para el cual el coche puede desplazarse 300 Km, sin necesidad de recargar el volante. (Suponer que el volante es un cilindro, cuyo momento de inercia respecto a su eje es $MR^2/2$).

La velocidad del volante en el S.I. de unidades es;
$\omega = 400 \cdot 2 \cdot \pi = 800 \cdot \pi$ radianes/segundo.

El volante de este original automovil constituye su "motor", por lo que la energía almacenada en él, E_V, que le permite recorrer 300 Km, ha de valer;

$$E_V = 2 \cdot 10^6 \cdot 300 = 600 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

La energía se almacena en el volante mediante la rotación de éste, es decir, la energía almacenada en él es su energía cinética de rotación, que viene dada por;

$$E_V = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M \cdot R^2}{2} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{100 \cdot R^2}{2} \cdot (800 \cdot \pi)^2 = 16 \cdot 10^6 \cdot \pi^2 \cdot R^2 \qquad (*)$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para E_V;

$$600 \cdot 10^6 = 16 \cdot 10^6 \cdot \pi^2 \cdot R^2 \quad ; \quad R^2 = 37{,}5 \cdot \pi^2$$

$$R = \sqrt{37{,}5} \cdot \pi = 6{,}2 \cdot \pi = 19{,}24 \text{ m}$$

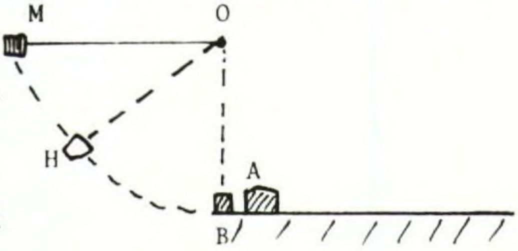
Como según la expresión (*), la energía del volante aumenta con el radio, el valor anterior es el menor valor del radio del volante para que acumule los $6 \cdot 10^8$ julios necesarios para recorrer los 300 Km.

$$R = \sqrt{37{,}5} \cdot \pi = 19{,}24 \text{ metros}$$

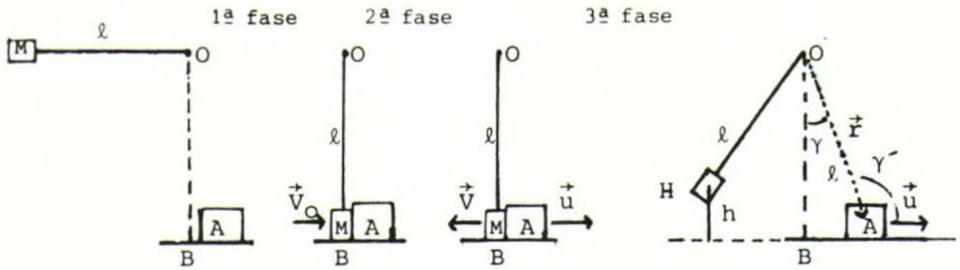
** 2.11 **

Junio 1988 - 1ª tanda - 1ª opción.

Un cuerpo de 20 Kg. de masa gira alrededor de O, siendo MO = 1,5 m.; se deja caer hasta la posición B, siendo BO vertical y BOM = 90°. Al llegar a B, se produce un choque perfectamente elástico con otro cuerpo A, de masa 25 Kg, situado, en reposo, sobre un plano horizontal y sin rozamiento. Como consecuencia del choque, el cuerpo M rebota hasta H. Determinar: a) El trabajo, W, realizado por M en su caida. b) La velocidad , u, que adquiere A. c) La energía cinética, E_c, que pierde M en el choque. d) la altura vertical, h, entre los puntos B y H.



Del enunciado puede deducirse que se considera el choque como instantaneo, por lo que se simplifica el problema dividiéndolo en tres fases:



POSICION INICIAL — INMEDIANTAMENTE ANTES DEL CHOQUE — INMEDIATAMENTE DESPUES DEL CHOQUE — POSICION FINAL

1a fase: Desplazamiento del cuerpo M desde la posición inicial hasta la posición B. Esta fase corresponde a la pregunta a) y al cálculo de V_o, o velocidad de M inmediatamente antes del choque.

2a Choque instántaneo, calculándose u (pregunta b) y V o velocidad de M inmediatamente después del choque que permite responder a la pregunta c).

3a fase: Movimiento de los cuerpos después del choque que permite responder a la pregunta d)

a) No es sencillo calcular el trabajo, W, aplicando la definición de trabajo ya que al ser la trayectoria circular, el angulo que forman el peso y el desplazamiento varía. Sin embargo, al ser el trabajo realizado por una fuerza conservativa, es igual a la disminución de su energía potencial correspondiente a una disminución de altura igual a $\ell = MO = 1,5$ m.

$$\underline{W} = -\Delta E_p = m_M \cdot g \cdot \ell = 20 \cdot 9,8 \cdot 1,5 = \underline{294\ J}.$$

b) Cómo el peso es la única fuerza que actúa sobre M en su caida, aplicando el teorema de las fuerzas vivas; $\Delta E_c = W$ y teniendo en cuenta que parte del reposo, $\Delta E_c = E_{co}$, siendo E_{co} la energía cinética en B, es decir, inmediatamente antes del choque.

$$E_{co} = W \ ; \quad \tfrac{1}{2} \cdot m_M \cdot V_o^2 = W \ ; \quad \tfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot V_o^2 = 294 \ ; \quad V_o = 5,422 \text{ m/s}$$

Para calcular la velocidad, u, de A hay que estudiar el choque instantáneo entre M y A que tambien lo consideraremos frontal por lo que inmediatamente después del choque, los centros de masa de M y de A se mueven en la misma horizontal que el de M antes del choque.

En el pequeñísimo intervalo de tiempo que dura el choque, el cuerpo M no se mueve libremente en ninguna dirección , por lo que no se conserva ninguna componente del momento lineal. Pero el cuerpo M y el A pueden girar libremente en torno al eje perpendicular a la figura por O, aunque de hecho A no gira, sino que se traslada con m.r.u., por lo que se conservará la componente del momento angular del sistema en la dirección del eje de giro.

El momento angular del sistema antes del choque es el de M, pues A está en reposo:

$$L_o = I \cdot \omega_o = K^2 \cdot m_M \cdot V_o / \ell$$

donde I y K son ,respectivamente, el momento de inercia y el radio de giro de M respecto del eje de giro, y $\omega_o = V_o/\ell$, su velocidad angular.

El momento angular de M después del choque respecto del eje de giro es:

$$L_M = I \cdot \omega = K^2 \cdot m_M \cdot V/\ell$$

Después del choque, el momento angular de A respecto de O, es $\vec{L} = \vec{r} \times m_A \cdot \vec{u}$ (ver la figura de la derecha), que es paralelo al eje de giro ($L_{eje} = |\vec{L}|$) y cuyo módulo es:

$$L_A = r \cdot m_A \cdot u \cdot \text{sen}\gamma' = r \cdot m_A \cdot u \cdot \text{sen}\gamma = \ell \cdot m_A \cdot u \quad \text{y} \quad L_{A-eje} = \ell \cdot m_A \cdot u$$

Obsérvese que el momento angular de un cuerpo que se traslada con m.r.u. permanece constante.

El momento angular del sistema después del choque es

$$L = L_M + L_A = K^2 \cdot m_M \cdot V/\ell + \ell \cdot m_A \cdot u$$

y de la conservación del momento angular se escribe:

$$K^2 \cdot m_M \cdot V_o/\ell = K^2 \cdot m_M \cdot V/\ell + \ell \cdot m_A \cdot u \qquad (*)$$

Si el cuerpo M se considera puntual, su radio de giro K, coincide con la distancia ℓ del cuerpo al eje de giro, es decir, $K = \ell$, y (*) se escribe:

$$\ell \cdot m_M \cdot V_o = \ell \cdot m_M \cdot V + \ell \cdot m_A \cdot u \;;\quad m_M \cdot V_o = m_M \cdot V + m_A \cdot u \qquad (**)$$

que equivale a la conservación de la componente del momento lineal en la dirección de la velocidad de M inmediatamente antes del choque (líneas horizontales del dibujo). Pero esto sólo es válido si el cuerpo M puede considerarse como puntual.

Si un cuerpo no puntual gira, la velocidad angular de todas sus partículas es la misma, pero la velocidad de todas ellas no tienen ni el mismo valor ni la misma dirección que la del C.M. Si el cuerpo M fuese una esfera de radio R;

$$L_M = I \cdot \omega = (\tfrac{2}{5} \cdot m_M \cdot R^2 + m_M \cdot \ell^2) \cdot \omega = (\tfrac{2}{5} \cdot R^2 + \ell^2) \cdot m_M \cdot (V/\ell) =$$

$$= \left((\tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{R^2}{\ell}) + \ell \right) m_M \cdot V \qquad \text{y} \quad K^2 = \tfrac{2}{5} \cdot R^2 + \ell^2 \neq \ell^2$$

Esta aproximación tampoco es válida si se sustituye el cuerpo M por una varilla que cuelga de O, como ocurre en otros problemas muy frecuentes.

La expresión del momento angular de A sigue siendo válida aunque éste no sea puntual, siempre que deslice y el choque sea frontal, ya que todas sus partículas se mueven con la misma velocidad del C.M., lo que no ocurre con M.

La suposición de que M es puntual, a la que induce el enunciado al no dar su forma ni sus dimensiones, podía haberse hecho inicialmente, escribiéndose (**) directamente con lo que se simplificarían los cálculos apreciablemente. Pero para que el alumno capte mejor que ésto es sólo una aproximación no siempre válida, hemos seguido este camino mucho más largo, pero tambien mucho más instructivo, al menos eso esperamos.

Sustituyendo valores en (**), tenemos:

$20 \cdot 5,422 = 20 \cdot V + 25 \cdot u$; $108,44 = 20 \cdot V + 25 \cdot u$ (+)

y como al ser el choque perfectamente elástico se conserva la energía: $\frac{1}{2} \cdot m_M \cdot V_o^2 = \frac{1}{2} \cdot m_M \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot u^2$; $20 \cdot 5,422^2 = 20 \cdot V^2 + 25 \cdot u^2$ (++)

Despejando V en (+) ; $V = (108,44 - 25 \cdot u)/20$ que sustituyéndolo en (++) se obtiene la ecuación :

$1125 \cdot u^2 = 5422 \cdot u^2$

que tiene dos soluciones:

la 1ª, $u = 0$ que corresponde a $V = 5,42$ m/s

la 2ª, $\underline{u = 4,820 \text{ m/s}}$ " $V = -0,605$ m/s

siendo la primera solución imposible ya que el cuerpo M atraviesa el A sin chocar con él. La segunda solución es la correcta y está de acuerdo con la experiencia; el cuerpo M rebota y el A se mueve en el sentido en el que se movía el M inmeditamente antes del choque.

c) Dado que el cuerpo M se considera puntual:

$E_c = E_c(\text{después}) - E_c(\text{antes}) = \frac{1}{2} \cdot m_M \cdot V^2 - \frac{1}{2} \cdot m_M \cdot V_o^2 =$

$= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (-0,605)^2 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 5,422^2 = - \underline{290 \text{ J}}.$

Es decir, hay una perdida de energía en el choque de 290 J.

d) Al ser H la posición hasta la que rebota M después del choque, h es la altura máxima a la que se eleva, por lo que toda la energía cinética que tenía inmediatamente después del choque se ha transformado en energía potencial:

$$\frac{1}{2} \cdot m_M \cdot V^2 = m_M \cdot g \cdot h$$

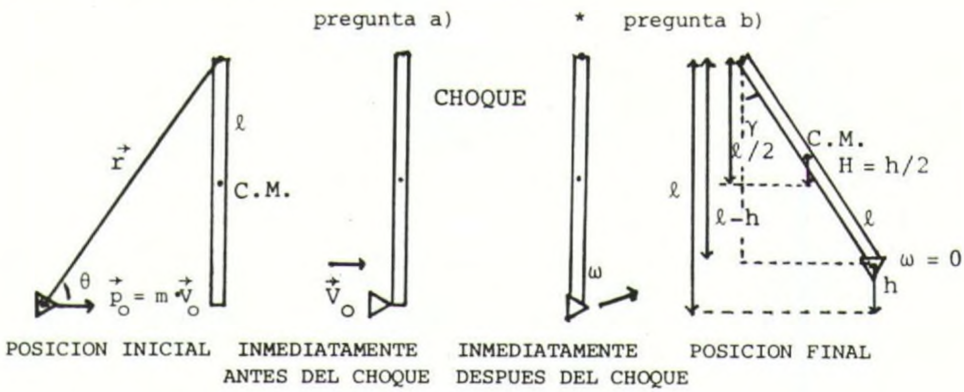
$$\underline{h} = \frac{V}{2 \cdot g} = \frac{-0,605}{2 \cdot 9,8} = \underline{0,0187 \text{ m}}$$

** 2.12 **

Junio 1988 - 2ª tanda - 1ª opción.

Una barra de masa m y 1m. de longitud, está suspendida por su extremo superior por un eje perpendicular que le permite girar en un plano vertical, como si fuese un péndulo. Una bala de igual masa m, se lanza con una velocidad de 10 m/s contra el extremo libre de la barra, donde se empotra. Calcular: a) La velocidad angular de la barra inmediatamente después del choque. b) El ángulo máximo a que se eleva la barra.

Del contexto del enunciado se interpreta que la barra puede considerarse como una varilla delgada y la bala como puntual. Así mismo, el choque completamente inelástico entre la bala y la barra suele ocurrir en un tiempo tan breve que puede considerarse instantáneo. Es decir, supondremos que primero se empotra la bala en la barra sin desplazarse ésta, siendo despreciable la influencia de las fuerzas exteriores al sistema bala-barra. Luego, la barra con la bala empotrada se eleva, siendo θ el ángulo máximo que alcanza. Llamaremos ℓ a la longitud de la barra, $\vec{p}_o$ al momento lineal de la bala y V_o al valor de su velocidad, antes del choque.



a) La barra no puede desplazarse libremente en la dirección en la que llega la bala, por lo que no se conserva la componente del momento lineal en esta dirección. Como la bala y la barra pueden girar libremente alrededor del eje de giro, se conservará la componente del momento angular en la dirección del eje de giro.

El momento angular inicial es el de la bala, igual a $\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p}_o$, cuya dirección es perpendicular al plano de la figura, la del eje de giro, y su valor es;

$$L_o = r \cdot p_o \cdot \text{sen}\theta = r \cdot m \cdot V_o \cdot \text{sen}\theta = \ell \cdot m \cdot V_o = 1 \cdot m \cdot 10 = 10 \cdot m$$

que permanece constante antes del choque.

El momento de inercia de una varilla delgada respecto a un eje perpendicular que pasa por su C.M. es $I_{CM} = m \cdot \ell^2/12$ y aplicando el Teorema de Steiner, el momento de inercia respecto del eje de giro que es paralelo al anterior y dista de él $\ell/2$, es:

$$I_{barra} = I_{CM} + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot \ell^2}{12} + m \frac{\ell^2}{4} = \frac{m \cdot \ell^2}{3}$$

si la deformación de la barra en el choque se desprecia.

El momento de inercia, I_{bb} , del sistema barra-bala es igual a la suma de los momentos de inercia de la barra y de la bala, siendo éste último $I_{bala} = m \cdot \ell^2$, ya que la bala se considera puntual.

$$I_{bb} = I_{barra} + I_{bala} = \frac{m \cdot \ell^2}{3} + m \cdot \ell^2 = \frac{4 \cdot m \cdot \ell^2}{3} = \frac{4 \cdot m}{3}$$

Si ω_c es la velocidad angular de la barra inmediatamente después del choque, aplicando la conservación del momento angular en la dirección del eje de giro, se escribe:

$$L_o = I_{bb} \cdot \omega_c \;; \quad 10 \cdot m = (4 \cdot m/3) \cdot \omega_c \;; \quad \underline{\omega_c = 30/4 = 7,5 \text{ rad/s}}$$

b) Inmediatamente después del choque, la energía cinética de la barra con la bala incrustada es;

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot I_{bb} \cdot \omega_c^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot m \cdot 7,5^2 = 37,5 \cdot m \qquad (*)$$

Después del choque, el sistema barra-bala girará hasta que se pare ($\omega = 0$), al transformarse toda su energía cinética en energía potencial, girando en este momento la barra su ángulo máximo γ, y elevándose su extremo inferior una altura h. El centro de masa de la barra, situado en su centro, se eleva una altura $H = h/2$ y su energía potencial aumenta en $\Delta E_{p-barra} = m \cdot g \cdot H = m \cdot g \cdot h/2$. La bala, situada en el extremo inferior de la barra, se eleva una altura h y su energía potencial incrementa en $\Delta E_{p-bala} = m \cdot g \cdot h$. El incremento en la energía potencial del sistema barra-bala, es:

$$\Delta E_p = \Delta E_{p-barra} + \Delta E_{p-bala} = m \cdot g \cdot h/2 + m \cdot g \cdot h = 3 \cdot m \cdot g \cdot h/2 \qquad (**)$$

Cuando el extremo inferior de la barra alcanza su altura máxima h, la energía cinética que tenía inmediatamente después del choque (*) se transforma en energía potencial (**) :

$E_c = \Delta E_p$ (+); $37{,}5 \cdot m = 14{,}7 \cdot m \cdot h$ (++); $h = 2{,}55$ metros

resultado imposible, pues aunque la barra gire 180° ($\gamma = \pi$ rad.), su extremo inferior sólo puede elevarse dos veces su longitud, es decir, 2 metros. Al ser la energía cinética del sistema inmediatamente después del choque, mayor que el máximo incremento de energía potencial que puede experimentar, no es posible la suposición (+) de que toda la energía cinética se transformaba en energía potencial. Por esto, al incrustarse la bala en la barra, esta comienza a girar y continuará girando indefinidamente si las pérdidas por rozamiento no existiesen. Luego, el ángulo máximo que se eleva la barra es $\underline{\pi \text{ radianes ó } 180^\circ}$.

Si el incremento de la energía potencial del sistema bala-barra (**) , lo expresamos en función del ángulo máximo girado γ, teniendo en cuenta (ver figura de la derecha):

$\cos\gamma = (\ell - h)/\ell$; $\ell \cdot \cos\gamma = \ell - h$; $h = \ell - \ell \cdot \cos\gamma$, se tiene:

$\Delta E_p = 14{,}7 \cdot (1 - \cos\gamma) \cdot m$.

Sustituyendo esta expresión en (+) se tiene:

$37{,}5 \cdot m = 14{,}7 \cdot (1 - \cos\gamma)\ m$

cuya solución es $\cos\gamma = -1{,}551$ solución imposible debido igualmente a que (+) no es posible.

Sin embargo, en este caso, puede ser algo más difícil que el alumno se dé cuenta de la causa del absurdo de la respuesta, por lo que en problemas similares, es preferible calcular primero la altura a la que se eleva (ya sea h ó H) y finalmente se obtiene el angulo girado. Hay que tener en cuenta también que las ecuaciones trigonométricas suelen suponer una dificultad adicional para los alumnos.

** 2.13 **

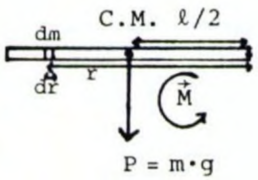
Septiembre 1988 - 1ª opción.

Una varilla homogénea de longitud $L = 1$ m. y masa $M = 1$ Kg., está sujeta por un extremo y en posición horizontal. Si se deja caer girando alrededor del extremo fijo, en un plano vertical, calcular:

- La aceleración angular con que inicia el movimiento.
- La velocidad lineal del extremo movil al pasar por la vertical.
- La resistencia que ha de hacer en ese instante,(cuando pasa por la vertical), el soporte fijo.

(DATO: Momento de inercia de la varilla respecto al eje de giro $I = \frac{1}{3} M L^2$ Kg.m^2)

NOTA: Para evitar confusiones y como es usual llamar $\vec{M}$ al momento de una fuerza y $\vec{L}$ al momento angular, llamaremos m a la masa de la varilla en lugar de M y ℓ a su longitud en lugar de L, como hace el enunciado de este problema.



1ª pregunta.

El momento $\vec{M}$ ejercido por el peso,$\vec{P}$,de la varilla sobre el eje, es paralelo al eje de giro y perpendicular al plano del dibujo.

De las definiciones de C.M. y de centro de gravedad (para un campo gravitatorio uniforme, ambos puntos coinciden) el peso se considera aplicado en este punto, por lo que el momento respecto del eje de giro es:

$$M = P \cdot \ell/2 = m \cdot g \cdot \ell/2$$

Si este argumento no es convincente el momento total en la dirección del eje de giro, M, es, $M = \int_m dM$, siendo dM la componente en la dirección del eje del momento diferencial producido por el peso de cada diferencial de masa, dm, donde la integral se extiende a toda la masa m de la varilla.

Si la densidad de la varilla es ρ y S es su sección, su masa es $m = \rho \cdot S \cdot \ell$ y el diferencial de masa de grosor dr, se escribe $dm = \rho \cdot S \cdot dr$, siendo r la distancia al eje de giro,por lo que $dM = g\cdot dm\cdot r = g\cdot\rho\cdot S\cdot dr\cdot r$, variando r entre el extremo de la varilla que gira $(r = 0)$ y el fijo $(r = \ell)$.

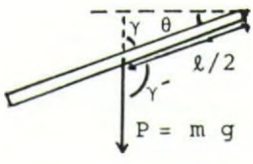
$$M = \int_{r=0}^{r=\ell} g\cdot\rho\cdot S\cdot r\cdot dr = g\cdot\rho\cdot S\cdot\int_{r=0}^{r=\ell} r\cdot dr = g\cdot\rho\cdot S\cdot\{\frac{r^2}{2}\}_0^{\ell} = g\cdot\rho\cdot S\cdot\ell^2/2$$

$= g\cdot m\cdot\ell/2$, como se obtuvo anteriormente.

Aplicando la ecuación de la dinamica de rotación, alrededor de un eje;

$$M = I\cdot\alpha \quad ; \quad \alpha = \frac{M}{I} = \frac{g\cdot m\cdot\ell/2}{m\cdot\ell^2/3} = \frac{3\cdot 9{,}8}{2\cdot 1} = 29{,}4 \text{ radianes/s}^2$$

2a pregunta.



Observése que al girar la varilla, el angulo γ', formado por ésta y el peso varía, por lo que el momento debido al peso depende del angulo girado θ ;

$$M = (\ell/2)\cdot P\cdot \mathrm{sen}\gamma' = m\cdot g\cdot\ell\cdot(\mathrm{sen}\gamma)/2 =$$
$$= m\cdot g\cdot\ell\cdot(\cos\theta)/2$$

y la ecuación de la dinámica de rotación se escribe:

$$I\cdot\alpha = \frac{m\cdot g\cdot\ell\cdot(\cos\theta)}{2} \quad ; \quad I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{m\cdot g\cdot\ell\cdot(\cos\theta)}{2}$$

no siendo posible resolver esta ecuación a este nivel. Pero esta segunda pregunta puede resolverse teniendo en cuenta que la energía se conserva, si se consideran despreciables las perdidas por rozamiento:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \quad ; \quad \Delta E_c = -\Delta E_p \quad y \quad -\Delta E_p = m\cdot g\cdot(\ell/2)$$

pues el C.M. de la varilla sólo desciende $\ell/2$ desde la posición horizontal hasta la posición vertical. Como el movimiento de la varilla es de rotación $\Delta E_{cr} = \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2$ ya que $\omega_o = 0$.

$$\frac{I\cdot\omega^2}{2} = \frac{m\cdot g\cdot\ell}{2} \quad ; \quad \omega^2 = \frac{m\cdot g\cdot\ell}{I} = \frac{m\cdot g\cdot\ell}{m\cdot\ell^2/3} = \frac{3\cdot g}{\ell} = 29{,}4 \quad ; \quad \omega = 5{,}422$$

y para el extremo móvil $\underline{V} = \omega\cdot\ell = 5{,}422\cdot 1 = \underline{5{,}42\ m/s}$

3a pregunta.

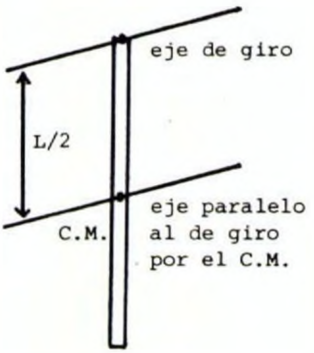
La resistencia o fuerza de reacción que ha de hacer el soporte fijo ha de contrarrestar la fuerza que ejerce la varilla sobre el eje y que en la posición vertical coincide con su peso:

$\vec{R} + \vec{P} = 0$; $\vec{R} = -\vec{P}$; $R = m\cdot g = 1\cdot 9{,}8 = \underline{9{,}8\ N}$

** 2.14 **

Junio 1989 - 2ª tanda - optativa - 1ª opción - problema 1

Una varilla homogénea de longitud L=1 m y masa M=1 Kg, está sujeta por un extremo, y en posición horizontal. Si se deja caer girando alrededor del extremo fijo, en un plano vertical, calcular: a) La aceleración angular con que inicia el movimiento b) La velocidad lineal del extremo al pasar por la vertical. (Momento de inercia de una varilla homogenea respecto a un eje que pasa por su centro de masa: $ML^2/12$). NOTA : Tomar el origen de ángulos en la horizontal.



Este problema coincide con los dos primeros apartados del problema anterior. La unica diferencia es la expresión dada para el momento de inercia que en este problema la dan respecto a un eje , supuestamente perpendicular a la varilla, que pasa por su C.M.. Como la expresión dada, $I_{CM} = M\cdot L\ /12$, es válida para un eje paralelo al de giro y que pasa por el C.M., el teorema de Steiner nos permite obtener la expresión para el momento de inercia respecto a dicho eje de giro;

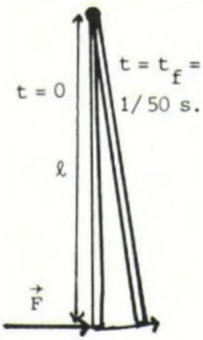
$$I_{eje\ giro} = I_{CM} + M\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{M\cdot L^2}{12} + \frac{M\cdot L^2}{4} = \frac{M\cdot L^2}{3}$$

que coincide con la expresión dada en el problema anterior.

** 2.15 **

Septiembre 1989 - obligatoria - 2ª opción - problema 1

Una varilla uniforme, que cuelga verticalmente de un pivote, tiene una longitud de 1 m y 2.5 Kg de masa. Se golpea la base de la varilla con una fuerza horizontal de 100 N durante 1/50 s. a)Hallar el momento angular adquirido por la varilla. b) ¿Llegará la varilla a la posición vertical, con el extremo libre sobre el pivote?
(Momento de inercia de la varilla respecto a un eje que pasa por su centro de masa $ML^2/12$).



a) Al ser muy pequeño el tiempo (0,02 s) de actuación de la fuerza, $\vec{F}$, supondremos que el arco descrito por la varilla durante ese tiempo es tambien muy pequeño, de modo que la trayectoria de su extremo puede considerarse horizontal. Por ello, la componente de la fuerza en la dirección de la trayectoria, $\vec{F}_s$, y normal a la varilla, será la dada; $\vec{F}_s = \vec{F}$.

El momento de inercia de la varilla vale; $I = \frac{m \cdot \ell^2}{12} + m \cdot (\frac{\ell}{2})^2 = \frac{m \cdot \ell^2}{3} = \frac{2,5 \cdot 1}{3} = 0,833$

El momento de la fuerza aplicado a la varilla respecto del eje de giro es $M = F \cdot \ell$ y el impulso angular ,$M \cdot \Delta t$, es igual al incremento del momento angular respecto de dicho eje;

$$\Delta L = M \cdot \Delta t = F \cdot \ell \cdot \Delta t = 100 \cdot 1 \cdot \frac{1}{50} = 2$$

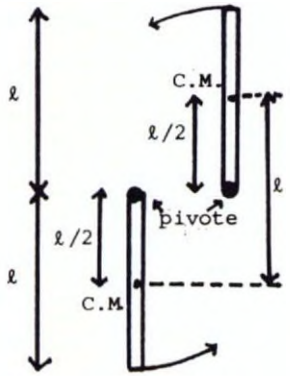
y como al partir la varilla del reposo $L_f = \Delta L$;

El momento angular adquirido por la varilla = $2\ Kg \cdot m \cdot s^{-2}$

(En el S.I. de unidades el momento angular también puede expresarse en N·m·s)

b) Al considerar que el tiempo de actuación de la fuerza es pequeño, podemos considerar, como en los problemas de choque, que primero la varilla adquiere un momento angular $L_f = I \cdot \omega_f$ (f significa al final del golpeo), y una energía cinética de rotación;

$$E_{CR} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_f^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{L_f^2}{I} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{0,833} = 2,4 \text{ J.} \quad (*)$$



Luego, la varilla gira desde la posición inicial (el desplazamiento de la varilla durante el golpeo se consideró despreciable), elevándose su C.M. una altura h, con lo que su energía potencial se incrementa en;

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h$$

Para que la varilla alcance la posición vertical, con el extremo libre sobre el pivote, $h = \ell$ (ver figura) y

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot \ell = 2{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 1 = 24{,}5 \text{ J.} (**)$$

Como la energía potencial que debe adquirir (**) es mayor que la energía cinética inicial (después del golpeo)(*), <u>la varilla no alcanza la posición vertical</u> con el extremo libre sobre el pivote.

Comprobemos que la aproximación inicial es "buena", calculando el angulo θ_f que se desplaza la varilla en el golpeo, para lo que hemos de obtener primero su aceleración angular α;

$$M = I \cdot \alpha \; ; \; \alpha = \frac{M}{I} = \frac{F \cdot \ell}{I} = \frac{100 \cdot 1}{0{,}833} = 120 \text{ radianes/segundo}^2$$

y el angulo girado partiendo del reposo es;

$$\theta_f = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2 = 0{,}024 \text{ radianes}$$

Como $F_s = F \cdot \cos\theta$, en el instante inicial $\theta = 0$ y $F_s = F$ y al final del golpeo $t = t_f = 1/50$ segundos, $\theta_f = 0{,}024$ radianes y $F_s = F \cdot \cos\theta = F \cdot 0{,}9997 \cong F$. Es decir, la aproximación hecha inicialmente de que el arco descrito es muy pequeño es muy buena ya que el error cometido es inferior al 0,03 %.

3. MOVIMIENTO ONDULATORIO

** 3.1 **

Septiembre de 1981 - 2ª tanda - 1ª opción.

Una onda de 10 m. de amplitud, se propaga de izquierda a derecha y su periodo es de 12 segundos. Supuesta de tipo sinusoidal, hallar la elongación en el origen cuando el tiempo es 1 segundo, contado a partir de la inciación del movimiento, desde la posición de equilibrio. En este mismo instante, la elongación es nula en un punto que dista 4 cm. del origen hacia la derecha. Hallar la longitud de onda correspondiente.

Según el enunciado; la amplitud A = 10 m., el periodo T = 12 s ,por lo que $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot(1/12) = \pi/6$ y como el origen se ha tomado en la posición de equilibrio para t=0 $\Psi(0,0) = 0$. Tomaremo el semieje X positivo en la dirección de propagación de la onda y de izquierda a derecha, por lo que la velocidad v es positiva. Según esto la ecuación de la onda puede escribirse de cualquiera de estas formas,entre otras

a) $\Psi(x,t) = A\cdot sen\cdot\omega(t - \frac{x}{v})$ b) $\Psi(x,t) = A\cdot sen\ \omega(\frac{x}{v} - t)$

c) $\Psi(x,t) = A.sen\ 2\cdot\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ d) $\Psi(x,t) = A\cdot sen\ (\omega t - kx)$

Si se utiliza la función coseno hay que introducir un desfase inicial de $\pm\frac{\pi}{2}$ para que $\Psi(0,0) = 0$. Igualmente las expresiones anteriores pueden escribirse con amplitud negativa (desfase de π) pues el enunciado no especifica este punto.

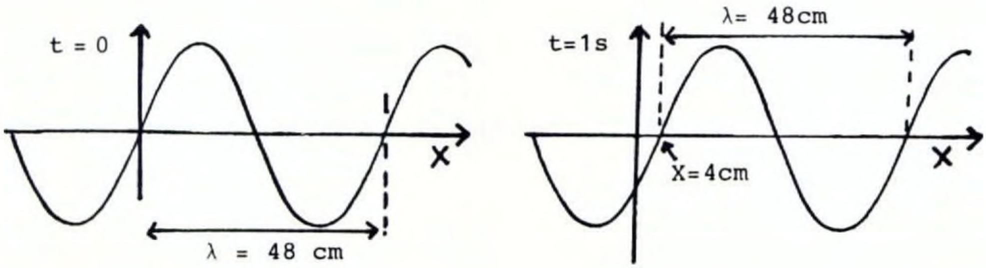
* Para t=1s , $\Psi(0,1) = 10\cdot sen\ (\pi/6) = \underline{5\ m}$,utilizándose cualquiera de las ecuaciones de onda .Advirtamos que utilizamos las unidades del S.I. por lo que los ángulos se miden en radianes (cuidado con las calculadoras)

** Utilizando la ecuación a);

$$\Psi(0{,}04\ ,\ 1) = 10\cdot sen(\frac{\pi}{6}\cdot(1- \frac{0{,}04}{v})) = 0\ ;\quad \frac{\pi}{6}\cdot(1 - \frac{0{,}04}{v}) = n\cdot\pi$$

siendo n un número entero, resulta $v = 0{,}04/(1-6n)$ y como $\lambda = v\,T = 0{,}48/(1-6n)$. Para que la longitud de onda sea positiva $n \leq 0$. n=0 corresponde al caso en el que entre el origen y x=4 cm la perturbación para t=1s no se anula en ningún punto,n=-1 en uno, n=-2 en dos....(Suponemos que el resultado pedido es n=0)

Para $\underline{n=0\quad \lambda = 0{,}48 m = 48\ cm}$; n=-1 $\lambda=0{,}069m = 6{,}9$ cm y ....



Si se utiliza la ecuación de onda b)

$$\Psi(x,t) = A \cdot \text{sen}\,\omega\cdot(\frac{x}{v} - t) = A\cdot\text{sen} -(\omega(t - \frac{x}{v})) = -A\cdot\text{sen}\,\omega\cdot(t - \frac{x}{v}) =$$

$$A\cdot\text{sen}\,(\omega\cdot(t - \frac{x}{v}) + \pi)$$

que supone amplitud negativa o desfasaje de π. Por ello la respuesta (*) sería -5m y las respuestas (**) serian las mismas , ya que

$$\Psi(0,04\ ,\ 1) = 0 \text{ implica } \frac{\pi}{6}(1 - \frac{0,04}{v}) + \pi = n\pi$$

obteniendose $V = \frac{0,04}{1-6(n-1)}$ y $\lambda = \frac{0,48}{1-6(n-1)}$ con $n \leq 1$

que da los mismos resultados para λ ; $\underline{n=1\ \lambda=48cm}$; $n=0\ \lambda=6,9cm$...

Si se utiliza la ecuación de onda c) se obtiene directamente λ (sin obtener primero v) y si se emplea d) se obtiene k y a partir de $\lambda=2\pi/k$,obtenemos λ .En ambos casos se obtienen los mismos resultados que en a)

En este problema se ha visto como a veces la respuesta no es única (diferentes valores de λ)así como las diferentes expresiones de la función de onda que pueden emplearse sin que exista una diferencia apreciable de dificultad.Lo que si ocurre en el caso de que los alumnos solo den la primera respuesta (n=0), es que ésta puede depender de la expresión de la ecuación de onda utilizada.

** 3,2 **

Septiembre de 1981 - 1ª tanda - 2ª opción.

El desplazamiento debido a una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda tensa, viene dado por:
$y = 0{,}25 \cos(0{,}05t - 0{,}2x)$ m. (t en segundos y x en metros)
a) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda a lo largo de la cuerda?
b) ¿Cuánto vale la velocidad del punto de la cuerda $x=2{,}5$ m en el intante $t=10$ segundos?.

a) Si "x" es el espacio recorrido por la onda desde el origen en un tiempo "t", el punto x en el instant t está en fase (Φ) con el origen en el instante incial, es decir $\Phi(x,t) = \Phi(0,0)$

$$0{,}05t - 0{,}2x = 0 \quad ; \quad x = \frac{0{,}05}{0{,}2}\, t = 0{,}25t$$

y al propagarse la onda con movimiento uniforme, el espacio recorrido por la perturbación viene dado por $x=vt$ por lo que
$\underline{v = 0{,}25 \text{ m/s}}$ al venir x en metros y t en segundos.

b) La onda transversal dada produce el desplazamiento de los puntos de la cuerda en la dirección del eje y. Un punto cualquiera de la cuerda viene dado por su posición en ella, x, que permanece constante. La posición de ese punto de la cuerda al vibrar viene dada por $y=0{,}25\cdot\cos(0{,}05t - 0{,}2x)$ donde x es la constante que determina el punto. La velocidad de dicho punto V_c es;

$$V_c = dy/dt = 0{,}25\cdot(-\text{sen}(0{,}05t - 0{,}2x))\cdot 0{,}05 =$$
$$-0{,}0125\cdot\text{sen}(0{,}05t - 0{,}2x)$$ y en el punto e instante dados;
$$V_c = -0{,}0125\cdot\text{sen}(0{,}05\ 10 - 0{,}2\ 2{,}5) = -0{,}0125\cdot\text{sen}\ 0 = \underline{0}$$

Al ser una onda armónica, cada punto describe un movimiento armónico simple y el punto dado en el instante dado tiene una fase $\Phi=0$ que al venir dado por $y=0{,}25\cdot\cos\Phi$, supone una amplitud máxima ($y=0{,}25$m) por lo que la velocidad de ese punto es cero recordando las propiedades del movimiento armónico (en los puntos de elongación máxima la aceleración y la fuerza son máximas,pero la velocidad es nula). Aunque los datos tan particulares de este problema (fase nula) permiten este último método, creemos más aconsejable realizarlo por el primer método, completamente general.

Este problema pone de manifiesto la diferencia entre el movimiento que la onda provoca (movimiento de los puntos de la cuerda según el eje Y) y el de la propia onda (según el eje X)

** 3.3 **

Julio de 1982 - 1ª tanda - 1ª opción.

Dos ondas de ecuaciones:

$U_1 = 6 \text{ sen } (1500t - 250x)$

$U_2 = 6 \text{ sen } (1500t + 250x)$

interfieren. Hallar:

a) La ecuación de las ondas estacionarias resultantes.

b) Amplitud en los nodos.

c) Distancia entre dos vientres próximos.

Este problema puede resolverse recordando las expresiones de las ondas estacionarias , si las ecuaciones de partida son las del problema, o simplemente, sumando ambas ondas que es lo que haremos y lo que creemos más recomendable. Pero el alumno necesita recordar la relación trigonométrica

$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \cdot \text{sen } \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A-B)$ .Si no se está seguro de la formula ,puede comprobarse para valores arbitrarios,mediante la calculadora. Si no se recuerda la fórmula, puede tratar de obtenerla, partiendo de las expresiones para el seno de la suma y de la diferencia de dos angulos, pero nunca debe resolverse un problema mediante una fórmula de la que no se está seguro ni dejar de hacerlo a priori,porque no se recuerda la fórmula. En último caso puede preguntársela al profesor,si se está en una prueba.

a)

$\underline{U} = U_1 + U_2 = 6 \cdot 2 \cdot \text{sen } (1500t) \cdot \cos (-250x) = \underline{12 \cdot \cos (250x) \cdot \text{sen}(1500t)}$

b) Un nodo es por definición, un punto de vibración nula por lo que su amplitud sera cero.

c) La amplitud viene dada por $12 \cos(250x)$ y en los vientres vale ± 12 (En realidad puede considerarse que vale 12 y que los puntos situados a derecha e izquierda de un nodo tienen un desfase de π). Como $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$ estos dos puntos difieren en π , es decir, si en x la amplitud vale 12 y en x' -12, $\alpha - \alpha' = \pi$, la fase de las amplitudes de ambos puntos difieren en π ,

$250x' - 250x = \pi$ $, x' - x = \pi/250 = \underline{0{,}013 \text{ m}}.$

Este apartado tambien puede resolverse recordando que la distancia entre dos vientres es $\lambda/2$, siendo λ la longitud de onda de U_1 y U_2. Recordando que una onda viene dada por

$U_1 = A \cdot \text{sen } 2\pi \cdot (\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) = 6 \cdot \text{sen } 2\pi \cdot (\frac{750}{\pi} t - \frac{125}{\pi} x)$ por lo que

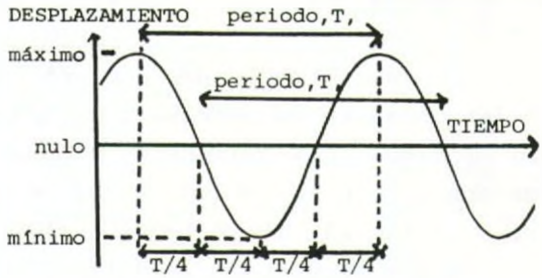
$\lambda = \pi/125 = 0{,}025$ m y la distancia entre dos vientres $= \lambda/2 = \underline{0{,}013\text{m}}$

** 3.4 **

Septiembre 1989 - obligatoria - 1ª opción - problema 1.

Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una cuerda de 1.4 m de longitud. El tiempo que tarda un punto en pasar de su desplazamiento máximo al desplazamiento nulo es de 0.17 s. Determinar: a) La frecuencia. b) La velocidad de la onda. c) La longitud de onda.

a) El enunciado se refiere a una onda que viaja por una cuerda de longitud finita que llamaremos , ℓ. El periodo, T, es el tiempo transcurrido para que cada punto de la cuerda ejecute una vibración u oscilación completa. El citado punto pasaría primero de desplazamiento máximo a nulo, luego a mínimo (valor igual al máximo pero en sentido opuesto al de éste), luego a desplazamiento nulo para volver al desplazamiento máximo, ha transcurrido un periodo; y así sucesivamente. Al ser la onda sinusoidal, los intervalos de tiempo para cada una de las cuatro fases citadas son iguales y por tanto iguales a T/4, por lo que T/4 = 0,17 y T = 0,68 s y la frecuencia, f;



Representación del DESPLAZAMIENTO de un punto de la cuerda EN FUNCION del TIEMPO

$$\underline{f} = 1/T = 1/0{,}68 \underline{= 1{,}47 \text{ Hz}} \quad \text{(ciclos/segundo)}$$

b) c) Como el enunciado no proporciona las características que afectan a la cuerda (tensión, densidad...), no podemos calcular su velocidad ni su longitud de onda por lo que ateniendonos estrictamente al enunciado no podemos responder a estos dos apartados, al menos numéricamente como el enunciado parece requerir.

Al propagarse por una cuerda finita, la onda se reflejará en sus extremos produciendose cada vez una onda refleja da que interferirá con la "inicial" y con las demás por lo que el estado de vibración de la cuerda será muy complejo y variable. Si los dos extremos de la cuerda estan fijos, es el caso más frecuente, y su longitud, ℓ, es un múltiplo de la semilongitud de onda ($\ell = n \cdot \lambda/2$, $n = 1,2...$) la cuerda vibrará con movimiento estacionario, correspondiendo $n = 1$ al caso en que las ondas estacionarias vibran en su estado fundamental cuya frecuencia y longitud de onda coinciden con las de la onda viajera.

Por todo esto, para resolver estos dos apartados, supondremos que la onda viajera hace resonar la cuerda en su estado fundamental, $n = 1$, lo cual no está explicitado en el enunciado, por lo que;

c) $\underline{\ell} = \lambda/2$; $\lambda = 2 \cdot \ell = 2 \cdot 1,4$ $\underline{= 2,8 \text{ metros.}}$

b) $\underline{V} = \lambda/T = \lambda \cdot f = 2,8 \; 1,47$ $\underline{= 4,12 \text{ m/s}}$

4. CAMPO GRAVITATORIO

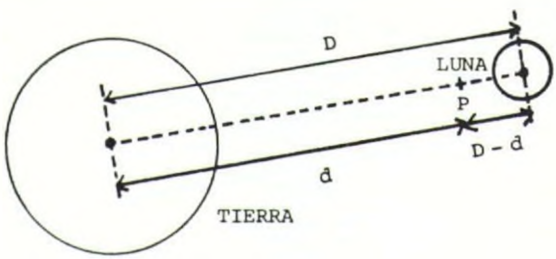
** 4.1 **

Junio 1989 - 2ª tanda - obligatoria - 2 opción - problema 1.

Calcular el punto de la linea imaginaria que une la Tierra y la Luna, en el que el valor del campo gravitatorio es nulo.

DATOS: Distancia Tierra-Luna = 3.84×10^8 m.

Masa de la Luna = 0.0123 x Masa de la Tierra



Llamaremos D a la distancia entre los centros de ambos astros; d a la distancia desde el punto dado P, al centro de la Tierra, por lo que la distancia desde este punto al centro de de la Luna será D - d.

Considerando que en el punto P, el campo gravitatorio sólo es debido a la atracción gravitatoria terrestre y lunar, cuyas intensidades tienen tienen igual dirección pero sentidos opuestos, para que se anule la intensidad del campo gravitatorio, la intensidad debida al campo terrestre tendrá igual valor que la debida a la Luna;

$$g_T = g_L \;;\; \text{siendo} \quad g_T = G\cdot\frac{M_T}{d^2} \quad \text{y} \quad g_L = G\cdot\frac{M_L}{(D-d)^2}$$

$$G\cdot\frac{M_T}{d^2} = G\cdot\frac{M_L}{(D-d)^2} \;;\; G\cdot\frac{M_T}{d^2} = G\frac{0{,}0123\cdot M_T}{(D-d)^2} \;;\; (D-d)^2 = 0{,}0123\cdot d^2$$

$$(D-d)^2 = 0{,}0123\cdot d^2 \;;\; D-d = \sqrt{0{,}0123}\; d \;;\; D = (1+\sqrt{0{,}0123})\cdot d$$

$$d = \frac{D}{1+\sqrt{0{,}0123}} = \frac{3{,}84\cdot 10^8}{1{,}1109} = 3{,}457\cdot 10^8 \text{ m} \quad \text{y} \quad D-d = 3{,}834\cdot 10^7 \text{ m.}$$

El punto problema dista $3{,}457\cdot 10^8$ m del centro de la Tierra y dista $3{,}834\cdot 10^7$ m del centro de la Luna.

Observése que dicho punto está más cerca del cuerpo de menor masa.

** 4.2 **

Junio 1984 - 1ª tanda - 1ª opción

Teniendo en cuenta que dos masas de 1 Kg, situadas a la distancia de 1 m se atraen con una fuerza de $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ N. Calcular la densidad media de la Tierra (R_T = 6370 Km)

La densidad media de la Tierra, d_T, se define como la relación entre su masa, M_T, y su volumen, V_T, que considerandola como una esfera, es igual a ;

$$V_T = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_T^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^3 = 1{,}083 \cdot 10^{21} \quad m^3$$

Para calcular la densidad sólo nos hace falta conocer M_T, pero aparentemente no podemos calcularla. El enunciado dice que se parta de la fuerza de atracción entre dos masas dadas, por lo que escribiremos la expresión de la fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales, m y m´, situadas a una distancia d;

$$F = G\,\frac{m \cdot m'}{d^2} \quad ; \quad 6{,}7 \cdot 10^{-11} = G \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} \quad ; \quad G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$$

Esta orientación no nos ha permitido calcular M_T, se necesita algún dato más. El alumno sabe que en la superficie terrestre, la intensidad del campo gravitatorio es aproximadamente $\mathcal{g} = g = 9{,}8$ N/Kg que coincide con el valor y dimensiones de la aceleración de caída libre cerca de la superficie terrestre . Particularizando la expresión de la intensidad del campo gravitatorio de la Tierra para un punto de su superficie;

$$\mathcal{g} = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = g \quad ; \quad M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G} = \frac{9{,}8 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)}{6{,}7 \cdot 10^{-11}} = 5{,}94 \cdot 10^{24} \text{ Kg.}$$

La densidad media de la Tierra es;

$$\underline{d} = \frac{M_T}{V_T} = \frac{5{,}94 \cdot 10^{24}}{1{,}083 \cdot 10^{-11}} = \underline{5{,}482 \; \frac{Kg}{m^3}}$$, es decir;

la densidad media de la Tierra es aproximadamente 5,5 veces la del agua

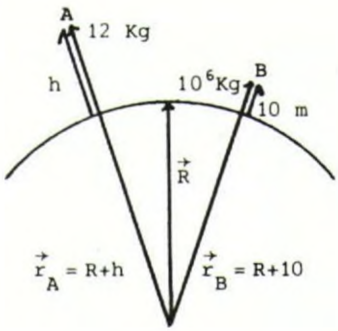
** 4.3 **

1985 - 2ª opción.

¿A qué altura sobre el suelo hay que colocar una masa de 12 Kg para que tenga la misma energía potencial que otra masa de 1000 Tm colocada a 10 m sobre el suelo?. Radio de la Tierra : 6000 Km

(NOTA: Téngase en cuenta que la gravedad es función de la distancia al centro de la Tierra y que, por tanto, cuando están involucradas grandes diferencias de altura, la gravedad no puede considerarse constante)

La expresión y los valores de las energías potenciales, como la gravitatoria, dependen del origen elegido, por lo que la solución de este problema depende de dicha elección. Una opción que la llamaremos a, sería tomar el origen del potencial y de la energía gravitatorios en el centro de la Tierra, y la otra opción, la b, los tomaría en en la superficie terrestre como es usual para cuerpos muy próximos a ella ($E_p = m \cdot g \cdot h$, expresión a la que la "NOTA" parece aludir)



Opción a.

Considerando simetría esférica, el campo y el potencial gravitatorios en el exterior de la Tierra, son los mismos que los originados por una masa puntual de igual valor situada en su centro. Si M y R son respectivamente la masa y el radio de la Tierra y r es la distancia de su centro a un punto de su exterior ($r \geq R$);

$V_g = -G \cdot \frac{M}{r}$ (*), y la energía gravitatoria $U_g = m \cdot V_g = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$

Para la masa A de 12 Kg, $r_A = R + h = 6 \cdot 10^6 + h$ metros, siendo h la altura del punto A desde la superficie de la Tierra, y para la masa B de 10^6 Kg, $r_B = 6 \cdot 10^6 + 10 = 6000010$ metros.

$$\text{Si } U_{gA} = U_{gB} \quad ; \quad -G \cdot \frac{m_A \cdot M}{r_A} = -G \cdot \frac{m_B \cdot M}{r_B}$$

$$r_A = \frac{m_A}{m_B} \cdot r_B = \frac{12}{10^6} \cdot 6000010 = 72 \text{ metros, por lo que el punto}$$

A estará prácticamente en el centro de la Tierra y como ha de estar en el exterior ($r_A > R$, $r_A > 6\cdot 10^6$ m), esta solución no es válida. Probaremos ahora con la otra opción, la b, que es a la que parecía aludir la nota.

Opción b.

Si tomamos el origen de potencial y de energía gravitatorios en la superficie terrestre, también podemos partir de la expresión (*) si hacemos un cambio de origen. El potencial gravitatorio en el punto r tomando como origen la superficie terrestre $V_{gs}(r)$, es la diferencia entre los potenciales gravitatorios en el punto r y en la superficie ($r = R$), tomando el potencial respecto de cualquier origen y en particular el dado por (*);

$$V_{gs}(r) = V_g(r) - V_g(R) = -\,G\cdot\frac{M}{r} - \left(-\,G\cdot\frac{M}{R}\right) = G\cdot M\cdot\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)$$

que es positivo al ser $r > R$ y por lo tanto $1/R > 1/r$

La energía gravitatoria es ahora;

$$U_{gs}(r) = G\cdot m\cdot M\cdot\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right) \quad \text{y si } U_{gsA} = U_{gsB} \quad \text{tenemos;}$$

$$G\cdot m_A\cdot M\cdot\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}\right) = G\cdot m_B\cdot M\cdot\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_B}\right); \quad m_A\cdot\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}\right) = m_B\cdot\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_B}\right)$$

$$12\cdot\left(\frac{1}{6\cdot 10^6}-\frac{1}{r_A}\right) = 10^6\cdot\left(\frac{1}{6\cdot 10^6}-\frac{1}{6000010}\right)$$

$$-\frac{12}{r_A} = \frac{10^6}{6\cdot 10^6} - \frac{10^6}{6000010} - \frac{12}{6\cdot 10^6} = -1,72222\cdot 10^{-6}$$

$$r_A = \frac{12}{1,72222\cdot 10^6} = 6967751$$

La altura h a la que hay que colocar la masa de 12 Kg es; $h = r_A - R = 6967151 - 6000000 = \underline{967751 \text{ m} = 968 \text{ Km} = 0,16\ R}$

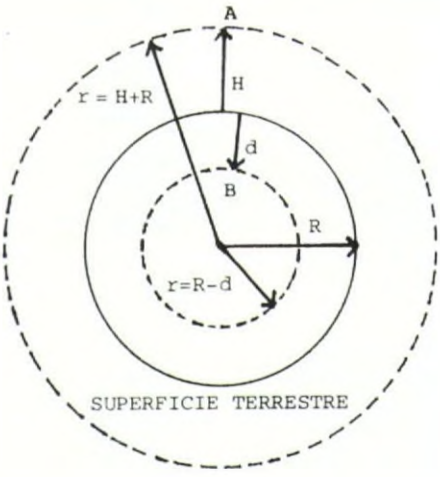
Hemos querido comenzar resolviendo este problema mediante la opción a, para que el alumno aprenda que cuando la solución de un problema no es válida hay que revisar la interpretación del enunciado y analizar las opciones hechas por si hay otras posibilidades compatibles con el enunciado. No siempre se resuelve el problema al primer intento.

Al realizarse los cálculos de este problema puede obtenerse un resultado extraño si la calculadora opera con menos de ocho cifras significativas como las de reloj, musicales...

** 4.4 **

Julio 1983 - 1ª tanda - 1ª opción.

¿A qué profundidad dentro de la Tierra hay que descender para que un cuerpo pese lo mismo que a H metros sobre su superficie?



Como el peso de un cuerpo es proporcional a la intensidad del campo gravitatorio g, este problema equivale a encontrar un punto en el interior de la Tierra a una distancia R - d de su centro (d es la profundidad a la que desciende) en el que la intensidad del campo gravitatorio valga lo mismo que en un punto situado en su exterior a una distancia R + H de su centro. Es decir

$g(R-d) = g(R+H)$ (*) ($g(r)$ significa el valor de g en ese punto)

Para resolver este problema consideremos la Tierra como una esfera homogénea , lo que es una gran simplificación, de masa M y radio R. Dada las dimensiones de la Tierra el cuerpo dado puede considerarse como puntual y a su masa la llamaremos m. Al suponer que la Tierra tiene simetría esférica, su campo gravitatorio será radial y constante en los puntos de una misma esfera , de radio r, concentrica con ella, lo que nos permite aplicar facilmente el Teorema de Gauss;

$\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\cdot\pi\cdot G\cdot M_e$,donde M_e es la masa encerrada por la superficie gaussiana de valor; $S = 4\cdot\pi\cdot r^2$;

$\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = \oint_S - g\cdot dS = -g\cdot\oint_S dS = -g\cdot S = -g\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2$

por lo que $-g\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2 = -4\cdot\pi\cdot G\cdot M_e$; $g = G\cdot M_e/r^2$

En un punto exterior a la Tierra, como el A, $r = R+H$ y la masa encerrada por la superficie gaussiana (la de trazos exterior en la figura) es la de la Tierra; $M_e = M$, luego la intensidad del campo gravitatorio terrestre en un punto de su exterior es;

$$g(r) = g(R+H) = G\,\frac{M}{(R+H)^2}$$

que como sabemos equivale al originado por un cuerpo puntual de igual masa que la Tierra y situada en su centro y de cuya expresión tambien se podía haber partido. Si no lo hemos hecho ha sido para mostrar la similitud y diferencia con la obtención de la expresión de g para un punto del interior.

En un punto del interior, como el B, $r = R - d$, la masa encerrada es la de una esfera de radio $r = R - d$ y cuya densidad es la densidad media de la Tierra;

$$d = \frac{M}{V_{\mathrm{Tierra}}} = \frac{M}{(4/3)\cdot\pi\cdot R^3} \qquad \text{por lo que}$$

$$M_e = d\cdot V_r = \frac{M}{(4/3)\cdot\pi\cdot R^3}(4/3)\cdot\pi\cdot(R-d)^3 = M\,\frac{(R-d)^3}{R^3} \qquad \text{y}$$

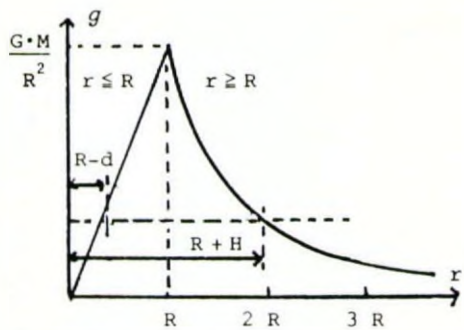
$$g(R-d) = G\,\frac{M_e}{(R-d)^2} = \frac{G}{(R-d)^2}\cdot M\cdot\frac{(R-d)^3}{R^3} = G\cdot M\cdot\frac{R-d}{R^3}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en (*), resulta;

$$G\cdot M\cdot\frac{R-d}{R^3} = G\cdot\frac{M}{(R+H)^2} \quad ; \quad (R-d)\cdot(R+H)^2 = R^3$$

$$R-d = \frac{R^3}{(R+H)^2} \quad ; \quad -d = \frac{R^3}{(R+H)^2} - R \quad ; \quad \underline{d = R\cdot\left(1 - \frac{R}{(R+H)^2}\right)}$$

Puede comprobarse que para $H = 0$, $d = 0$ por lo que $R + H$ y $R - d$ corresponden a un punto de la superficie y para $H = \infty$, $d = R$, el centro de la Tierra, anulándose g en ambos puntos (el exterior; $R+H=\infty$ y el interior; $R-d=0$).



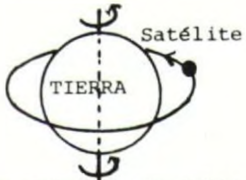
Intensidad del campo gravitatorio originado por una ESFERA HOMOGENEA.

Este problema puede entenderse mejor si representamos la intensidad del campo gravitatorio originado por una esfera homogenea, la Tierra en este problema, en función de la distancia r a su centro. Para un mismo valor de g, hay dos valores de r, uno dentro de la esfera $(R - d)$ y otro fuera $(R + H)$.

** 4.5 **

1985 - 1ª opción

¿A qué distancia de la Tierra debe situarse un satélite artificial para que su periodo sea igual al periodo de rotación de la Tierra sobre su eje? ¿Por qué debe situarse dicho satélite sobre el ecuador si se desea que permanezca siempre sobre un mismo punto de la Tierra?



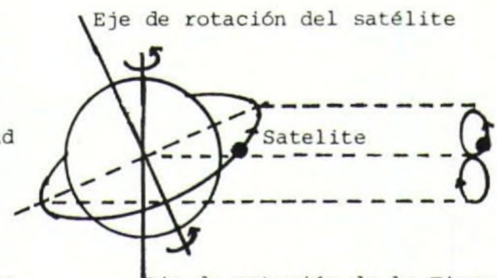
Eje rotación de ambos

ORBITA ECUATORIAL

La fuerza gravitatoria atrae al satélite hacia el centro de la Tierra que será tambien el centro de su orbita si por sencillez la consideramos circular, aunque en realidad es uno de los focos de su órbita elíptica.

Si el satélite gira con el mismo periodo que la Tierra, (igual valor de la velocidad angular), en el mismo sentido y en una órbita ecuatorial, es decir, con el mismo eje de rotación que la Tierra; se moverá conjuntamente con la Tierra, es decir, no hay movimiento relativo entre la Tierra y el satélite. Una varilla que uniera el satélite con un punto de la Tierra no se doblaría ni se rompería. Esto no ocurre si la órbita no es ecuatorial ya que el eje de rotación del satélite no es el mismo que él de la Tierra y su movimiento angular es distinto aunque el valor de la velocidad angular sea el mismo para ambos.

Eje de rotación de la Tierra



Eje de rotación de la Tierra

ORBITA NO ECUATORIAL

Para precisar un poco más, indiquemos que la línea que une la posición del satélite con el centro de la Tierra, corta a la superficie terrestre en un punto que viene determinado por su latitud (distancia angular desde el ecuador al paralelo que pasa por el punto) y por su longitud (distancia angular del meridiano que pasa por el punto al meridiano de Greenwich).

Si la órbita del satélite no es ecuatorial, un observador en la Tierra que gira con ella, vería el satélite unas veces sobre el plano del ecuador y otras bajo él. Análogamente, tambien su longitud oscila en torno a una longitud fija. Aunque para un observador alejado y en "reposo" el satélite describe una circunferencia con perido igual al de rotación de la Tierra, un observador en la superficie terrestre y moviendose con ella, observaría una trayectoria en forma de ocho (ver figura).

Para que un satélite,de masa m,esté en órbita alrededor de la Tierra, de masa M, la fuerza gravitatoria terrestre ha de producirle la aceleración centrípeta adecuada a ese movimiento circular, es decir;

$$a_c = \frac{V^2}{r} = \frac{(2\cdot\pi\cdot r/T)^2}{r} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot r}{T^2}$$

siendo r el radio de la orbita del satélite, es decir, la distancia del centro de la Tierra al satélite, y T es su periodo que según el enunciado es igual al de rotación de la Tierra;

T = 24 horas =86400 segundos.

$$F_{gravitatoria} = m\cdot a_c \quad ; \quad G\cdot\frac{M\cdot m}{r} = m\cdot\frac{4\cdot\pi^2\cdot r}{T^2} \quad ;$$

$$r^3 = \frac{G\cdot M}{4\cdot\pi^2}\cdot T^2 \quad ; \quad r = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M}{4\cdot\pi^2}\cdot(86400)^2}$$

Si el alumno no recuerda los valores de G y de M que el enunciado no proporciona, puede recordar que la intensidad del campo gravitatorio en su superficie es aproximadamente igual a 9,8 N/Kg ;

$$g = G\cdot\frac{M}{R^2} \quad y \quad G\cdot M = g\cdot R^2 = 9,8\cdot\left(\frac{20\cdot 10^6}{\pi}\right)^2 = 3,97\cdot 10^{14}$$

ya que la longitud de un meridiano y del ecuador es aproximadamente de cuarenta millones de metros, es decir;

$$40\cdot 10^6 = 2\cdot\pi\cdot R \quad ; \quad R = \frac{40\cdot 10^6}{2\cdot\pi} = \frac{20\cdot 10^6}{\pi} \quad \text{por lo que}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3,97\cdot 10}{4\cdot\pi^2}\cdot(86400)^2} = \sqrt{7,51\cdot 10^{22}} = 42,2\cdot 10^6 \text{ m} = 42,2\cdot 10^6 \text{ Km}$$

que es la distancia Satélite-Tierra medida desde sus centros.

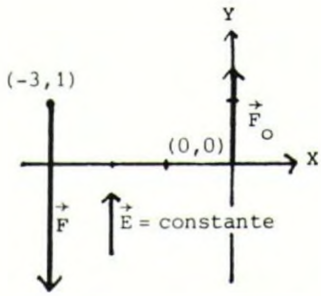
5. CAMPO ELÉCTRICO (I)

** 5.1 **

Junio 1989 - 2ª tanda - optativa - 1ª opción - problema 2

Cuando se coloca una carga de prueba $q = 2 \times 10^{-9}$ C en el origen de un sistema de referencia, experimenta la acción de una fuerza electrostática de $8 \times 10^{-4}\vec{j}$ N. Calcular el campo eléctrico en el origen.

Suponiendo el campo eléctrico uniforme, determinar el valor de la fuerza ejercida por el mismo sobre una carga de -4×10^{-9} C, situada en el punto (-3,1) m.



Si el campo eléctrico en el origen es $\vec{E}_O$, $\vec{F}_O = q \cdot \vec{E}_O$ y

$$\underline{\vec{E}_O} = \frac{\vec{F}_O}{q} = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{2\ 10^{-}} \cdot \vec{j} = \underline{4 \cdot 10^{5} \cdot \vec{j} \quad N/c}$$

Como el campo eléctrico es uniforme, en cualquier punto y en particular en el (-3,1), vale lo mismo que en el origen, por lo que $\vec{E} = \vec{E}_O$ y la fuerza electrostática, $\vec{F}$, sobre la nueva carga dada es;

$$\underline{\vec{F}} = q \cdot \vec{E} = q \cdot \vec{E}_O = -4 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^{5} \cdot \vec{j} = \underline{-16 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j} \quad N}$$

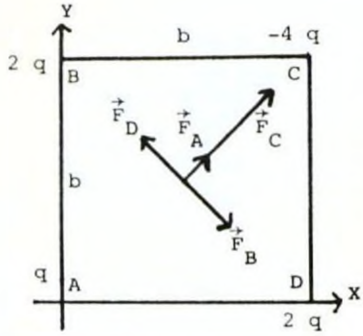
que tiene sentido opuesto al del campo eléctrico por ser la carga negativa.

** 5.2 **

Junio 1989 - 1ª tanda - optativa - 2ª opción - problema 2

Calcular la fuerza eléctrica resultante, que actúa sobre una carga de 1 C, colocada en el centro de un cuadrado de lado b m, que tiene cargas q, 2q, -4q y 2q (en C), colocadas en este orden sobre los cuatro vértices.

Llamaremos a estas cargas A,B,C,D y las consideraremos colocadas como se indica en la figura. Sería compatible con el enunciado ordenar las cargas en sentido contrario y/o colocar otra cualquiera en el origen, aunque la forma de dar la respuesta debe ser independiente de estas opciones.



Para escribir la fuerza de interacción de cada una de las cargas situadas en los vértices con la del centro, calcularemos primero su valor y luego lo multiplicaremos por el vector unitario en la dirección-sentido de la fuerza, obtenido a partir de la figura. El cuadrado de la distancia de cada vértice al centro del cuadrado es $b^2/2$.

$$\vec{F}_A = K\cdot\frac{q\cdot 1}{b^2} = 2\cdot K\cdot\frac{q}{b^2} \;;\; \vec{u}_A = (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \;;\; \vec{F}_A = F_A\cdot\vec{u}_A = K\cdot\frac{q}{b^2}\cdot(\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$\vec{F}_B = K\cdot\frac{2\cdot q\cdot 1}{b^2} = 4\cdot K\cdot\frac{q}{b^2} \;;\; \vec{u}_B = (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}) \;;\; \vec{F}_B = F_B\cdot\vec{u}_B = K\cdot\frac{q}{b^2}\cdot(2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$$

$$\vec{F}_C = K\cdot\frac{4\cdot q\cdot 1}{b^2} = 8\cdot K\cdot\frac{q}{b^2} \;;\; \vec{u}_C = (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \;;\; \vec{F}_C = F_C\cdot\vec{u}_C = K\cdot\frac{q}{b^2}\cdot(4\sqrt{2},4\sqrt{2})$$

$$\vec{F}_D = K\cdot\frac{2\cdot q\cdot 1}{b^2} = 4\cdot K\cdot\frac{q}{b^2} \;;\; \vec{u}_D = (\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \;;\; \vec{F}_D = F_D\cdot\vec{u}_D = K\frac{q}{b^2}\cdot(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$$

$$\vec{F} = F\cdot\vec{u} = K\cdot\frac{q}{b^2}\cdot(5\sqrt{2},5\sqrt{2})$$

$$\vec{F} = F\cdot\vec{u} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{q}{b^2}\cdot(5\sqrt{2},5\sqrt{2}) = \underline{9\cdot 10^{10}\cdot\frac{q}{b^2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})} = 9\cdot 10^{10}\cdot\frac{q}{b^2}\cdot\vec{u}$$

Obsérvese que hemos dividido el vector $(5\sqrt{2},5\sqrt{2})$ por su módulo, que es 10, obteniéndose el vector unitario $\vec{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ que tiene la dirección y sentido de la bisectriz del primer cuadrante, es decir, está dirigida hacia C. Daremos la respuesta de forma que no dependa del sistema de referencia ni de nuestro modo de colocar las cargas:

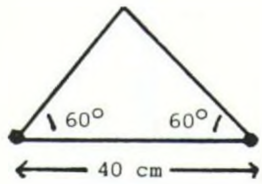
El valor de la fuerza es $9\cdot 10^{10}\cdot\frac{q}{b^2}$ N y está dirigida hacia la carga de valor $-4\cdot q$.

En algunos casos particulares, como el de este problema, la suma vectorial puede simplificarse. Una vez calculados los valores de las fuerzas, módulos, puede observarse que $\vec{F}_B$ y $\vec{F}_D$ se contrarrestan, ya que tienen igual valor y dirección, pero sentidos contrarios, por lo que su suma es nula. Como $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_C$ tienen igual dirección y sentido; $F = F_A + F_C$ y $\vec{F}$ está dirigida hacia la carga $-4\cdot q$, por estarlo $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_C$.

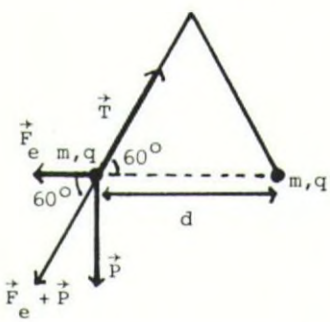
** 5.3 **

Junio 1987 - 1º tanda - 2ª opción.

En la figura se presenta la situación de dos bolas, de tamaño despreciable e idénticas, cada una de masa 0,1 g, llevan cargas idénticas y estan suspendidas por dos cuerdas de igual longitud. En equilibrio, la posición que guardan es la que se muestra. Encuéntrese la carga de cada bola.



Consideraremos que ambas bolas son puntuales. Sobre cada una de ellas actúa su peso, $\vec{P}$, la fuerza electrostática, $\vec{F}_e$, con la que ambas bolas se repelen al tener cargas de igual signo, y la tensión de la cuerda $\vec{T}$. Como las bolas estan en equilibrio ; $\vec{T}+\vec{F}_e+\vec{P}=0$ (*) ; $\vec{T}=-(\vec{F}_e+\vec{P})$ por lo que la resultante de $\vec{F}_e$ y $\vec{P}$ tiene la dirección de $\vec{T}$, es decir, de la cuerda; $tg60^o = P/F_e$ (**)



$$F_e = \frac{P}{tg60^o} = \frac{m\cdot g}{tg60^o} = \frac{10^{-4}\cdot 9,8}{1,732} = 5,658\cdot 10^{-14}$$

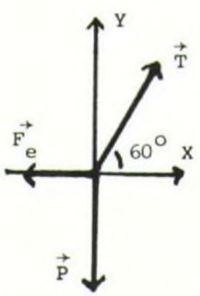
y aplicando la ley de Coulomb, si q es la carga de cada bola y d la distancia entre ellas;

$$F_e = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{d^2} \; ; \qquad q^2 = 4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot d^2\cdot F_e = \frac{1}{9\cdot 10^9}\cdot 0,4^2\cdot 5,658\cdot 10^{-4}$$

$$q = 1,0059\cdot 10^{-14} \qquad y \qquad q = 1,0029\cdot 10^{-7}\ C.$$

<u>La carga de cada bola es</u> aproximadamente de <u>10^{-7}C ó 0,1 µC</u>.

F_e puede obtenerse de forma más general, resolviendo la ecuación vectorial (*) que equivale a dos ecuaciones escalares, las de sus componentes. Tomando el sistema de referencia de la figura; $\vec{T} = (T\cdot cos60^o, T\cdot sen60^o)$, $\vec{F}_e = (-F_e, 0)$ y $\vec{P} = (0,-P)$, por lo que (*) equivale a;



$$\left| \begin{array}{l} T\cdot cos60^o - F_e = 0 \\ T\cdot sen60^o - P = 0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} T\cdot cos60^o = F_e \\ T\cdot sen60^o = P \end{array} \right.$$

y dividiendo la 2a ecuación por la 1a, se tiene (**).

** 5.4 **

Septiembre 1988 - 2ª opción.

Junio 1989 - 1ª tanda - obligatoria - 2ª opción - problema 2.

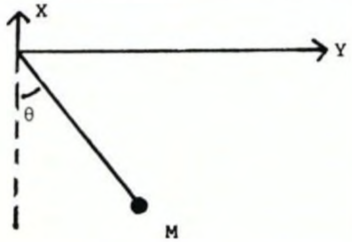
Una carga puntual de $M = 1$ g. está suspendida de un hilo de masa despreciable e inerte a los efectos de campo eléctrico. El péndulo se introduce en una región en la que existe un campo eléctrico uniforme.

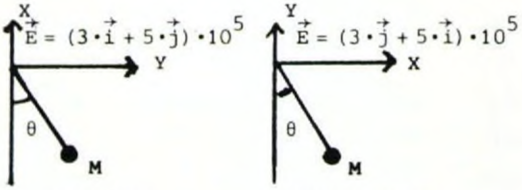
Cuando el valor del campo es:

$E = (3\cdot\vec{i} + 5\cdot\vec{j})\cdot 10^5$ N/C

el péndulo se mantiene en equilibrio formando un ángulo con la vertical de $\theta = 37^{o}$.

Calcular: a) el valor de la carga eléctrica, b) la tensión del hilo.



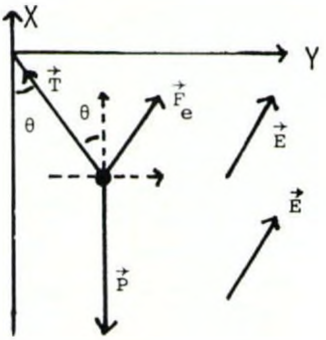


ORIGINAL MODIFICADO

INTERCAMBIO DE EJES (no aconsejado)

Conviene observar que el sistema de referencia dado no es "a derechas". Aunque esto es irrelevante dado que no hay que utilizar "productos vectoriales" el alumno ha de estar muy atento a los vectores unitarios y a las componentes. Sin embargo, si el alumno se siente incómodo, puede intercambiar el nombre de los ejes, lo que no aconsejamos, pero entonces es imprescindible intercambiar tambien los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$, pues de lo contrario se modificaría el enunciado.

Sobre la carga puntual actua su peso, $\vec{P} = -M\cdot g\cdot\vec{i} = -10^{-3}\cdot 9{,}8\cdot\vec{i}$ N, la tensión del hilo $\vec{T} = T_x\cdot\vec{i} + T_y\cdot\vec{j}$, y la fuerza electrostática $\vec{F}_e = q\cdot\vec{E} = 3\cdot 10^5\cdot q\cdot\vec{i} + 5\cdot 10^5\cdot q\cdot\vec{j}$



Al estar la carga en equilibrio;

$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_e = 0$, es decir;

$$\left|\begin{array}{l} T_x + P_x + F_{ex} = 0 \\ T_y + P_y + F_{ey} = 0 \end{array}\right.$$

Como $\theta = 37^{o}$, $T_x = T\cdot\cos 37^{o}$ y $T_y = -T\cdot\mathrm{sen}\,37^{o}$,al ser negativa.

$$\left| \begin{array}{l} T\cdot cos37^{o} - 9{,}8\cdot 10^{-3} + 3\cdot 10^{5}\cdot q = 0 \\ T\cdot sen37^{o} \qquad\qquad + 5\cdot 10^{5}\cdot q = 0 \ ; \ T = \dfrac{5\cdot 10\cdot q}{sen37^{o}} = 8{,}31\cdot 10^{5}\cdot q \quad (*) \end{array} \right.$$

$$8{,}31\cdot 10^{5}\cdot q\cdot 0{,}80 - 9{,}8\cdot 10^{-3} + 3\cdot 10^{5}\cdot q = 0 \quad ; \quad 9{,}65\cdot 10^{5}\cdot q = 9{,}8\cdot 10^{-3}$$

a) El valor de la carga es $\underline{q} = 10{,}2\cdot 10^{-3}$ C = $\underline{10{,}2 \ \ nC}$

b) que sustituyendolo en (*) se tiene;

$$\underline{T} = \frac{5\cdot 10^{5}}{0{,}6}\cdot 10{,}2\cdot 10^{-9} = \underline{8{,}5\cdot 10^{-3}\ N}$$

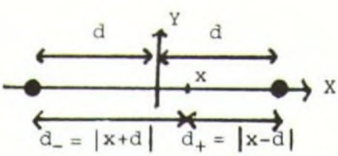
Conviene señalar las semejanzas y diferencias con el problema anterior. En ambos casos hay un equilibrio entre la tensión del hilo o cuerda, el peso del cuerpo y la fuerza electrostática que actua sobre él. La diferencia radica en que en el problema anterior, $\vec{F}_e$ es horizontal y el campo eléctrico está producido por otra cuerpo cargado, mientras que en éste el campo eléctrico es oblicuo ,y por lo tanto tambien lo es $\vec{F}_e$, y no sabemos como se produce, sólo conocemos su expresión. Por ello debe aconsejarse una vez más, leer detenidamente el problema , realizar la figura con precisión y tratar de resolver este problema en lugar de recordar memorísticamente la solución de un problema parecido, como el anterior. Indiquemos finalmente que la expresión $tg\theta = P/F_e$ válida en el problema anterior, no lo es en éste.

** 5.5 **

Septiembre 1989 - obligatoria - 1ª opción - problema 2.

Dos cargas positivas q, estan situadas en el eje x de un sistema de referencia, en los puntos x= +d y x = -d, respectivamente. Hallar el potencial electrostático V, en función de x, para puntos situados sobre el eje x, en:

a) $x < -d$ b) $-d < x < +d$ c) $x > +d$



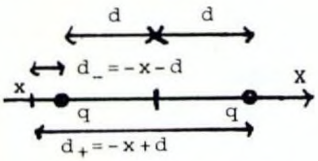
Si x es la abscisa de un punto genérico situado en el eje X, la distancia a la carga situada en x = +d es, $d_+ = |x - (+d)| = |x - d|$, y a la situada en x = -d es, $d- = |x - (-d)| = |x + d|$, donde se han utilizado valores absolutos al ser la distancia siempre positiva.

El potencial en el punto de abscisa x, es;

$$V(x) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{d_+}+\frac{q}{d_-}\right) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{|x-d|}+\frac{q}{|x+d|}\right)$$

siendo esta expresión válida para cualquier valor de x, es decir, para los tres casos.

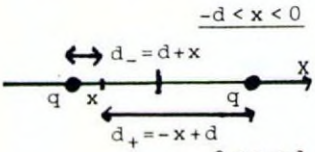
Es posible escribir para cada uno de los tres casos, una expresión en la que no se utilicen valores absolutos. Para esto es suficiente particularizar d_+ y d_-, observando detenidamente la representación de cada caso:

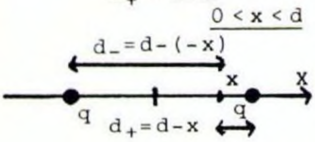


a) $x < -d$

$d_+ = -x + d = d - x$; $d_- = -x - d = -(x + d)$

$$V(x) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{d-x}-\frac{q}{x+d}\right)$$



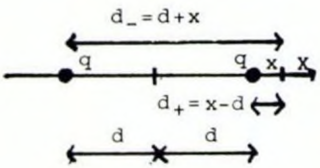


b) $-d < x < +d$.

En este caso se presentan dos situaciones; $-d < x < 0$ y $0 < x < d$, verificandose para ambas;

$d_+ = d - x$; $d_- = x + d$

$$V(x) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{d-x}+\frac{q}{x+d}\right)$$



c) $x > d$

$d_+ = x - d$; $d_- = x + d$

$$V(x) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{x-d}+\frac{q}{x+d}\right)$$

Este problema o ejercicio, está planteado a un nivel conceptual de Física y Matemáticas elemental, pero para solucionarlo hay que hacerlo, hay que realizar los tres dibujos, o mejor los cuatro, y sobre ellos calcular las distancias. Los problemas de este tipo, una vez resueltos, parecen "cosas de niños", pero si no se acostumbran a hacerlos, si no adquieren las destrezas necesarias, muy probablemente en un examen , no intentarán hacerlos o se equivocarán.

** 5.6 **

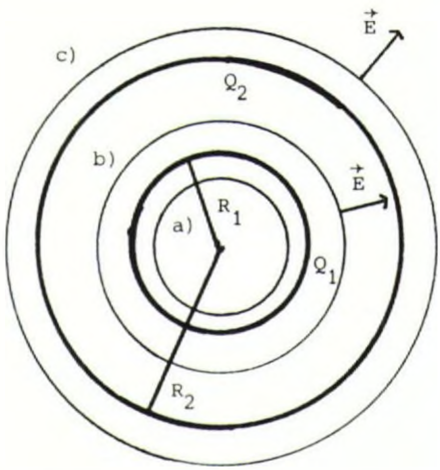
Junio 1986 - 2ª tanda - 2ª opción.

Se tienen dos esferas huecas y concéntricas de radios R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$. Sobre cada una de ellas hay una carga Q_1 y Q_2 respectivamente, distribuidas uniformemente. Calculense los campos eléctricos:

a) Para puntos, r, interiores a ambas esferas $(r < R_1 < R_2)$

b) Para puntos, r, situados entre ambas esferas $(R_1 < r < R_2)$

c) Para puntos, r, situados fuera de ambas esferas $(R_1 < R_2 < r)$



El enunciado no dice explicitamente que las "esferas huecas" o cortezas esféricas sean muy delgadas, aunque ésto debe suponerse ya que sólo nos dan un radio de cada una.

Para aplicar el teorema de Gauss, tomaremos una esfera gaussiana, de radio r y superficie S $(S = 4\cdot\pi\cdot r^2)$, concéntrica con las esferas huecas y que pase por el punto dado, definido por r de acuerdo con cada apartado. Dada la simetría del sistema y la distribución uniforme de la carga, si el campo no es nulo, es radial y constante en cada superficie gaussiana. Si E_r es la componente radial del campo eléctrico $(\vec{E} = E_r\cdot\vec{u}_r$,el sentido de $\vec{u}_r$ es hacia fuera), el flujo del campo eléctrico a través de estas superficies gaussianas es;

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E_r\cdot dS = E_r\cdot\oint_S dS = E_r\cdot S = E_r\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2$$

y si Q_e es la carga encerrada, el teorema de Gauss se escribe;

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} \quad ; \quad E_r\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} \quad ; \quad E_r = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_e}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_e}{r^2}\cdot\vec{u}_r \quad (*)$$

Puede extrañar que al ser el campo radial, no escribamos simplemente $\vec{E} = E\cdot\vec{u}_r$, donde E es el módulo. Pero como el enunciado no nos da los signos de Q_1 y Q_2, no sabemos el sentido del campo, pudiendo ser E_r positivo o negativo (hacia fuera o hacia dentro) según que la carga encerrada sea positiva o negativa, mientras que el módulo E es siempre positivo, es decir, $E_r = \pm E$.

Apliquemos ahora la expresión (*) a los tres casos planteados en el enunciado:

a) Si $r < R_1 < R_2$, la carga encerrada es nula ($Q_e = 0$), pues ninguna esfera gaussiana situada en el interior de la esfera de radio R_1 encierra carga alguna.

$$\vec{E} = 0$$

b) Si $R_1 < r < R_2$, la carga encerrada es Q_1 ($Q_e = Q_1$) y

$$\vec{E} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1}{r^2}\cdot\vec{u}_r$$

que será hacia fuera si la carga Q_1 es positiva y hacia dentro si es negativa.

c) Si $r > R_2 > R_1$, la carga encerrada es $Q_1 + Q_2$ ($Q_e = Q_1 + Q_2$) y

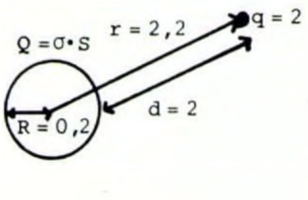
$$\vec{E} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1 + Q_2}{r^2}\cdot\vec{u}_r$$

que será hacia fuera si la suma de ambas cargas es positiva y hacia dentro en caso contrario.

** 5.7 **

Junio 1983 - 2ª tanda - 2ª opción.

Hallar la fuerza que actúa sobre una carga de 2C., si ésta se situa a la distancia de 2 m. de la superficie de una esfera cargada de 0,2 m. de radio y con una densidad superficial de carga de 2.10^{-9} C/m^2.



Este problema puede resolverse de dos formas algo diferentes, considerándose en ambos casos la carga $q = 2C$ como puntual. La carga de la esfera es $Q = \sigma\cdot S = \sigma\cdot 4\cdot\pi\cdot R^2 = 2\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot\pi\cdot 0,2^2 = 10^{-9}$ C.

La distancia de la carga a la superficie de la esfera es $d = 2$ m por lo que la distancia al centro de la esfera será ;

$$r = d + R = 2 + 0,2 = 2,2 \text{ m}$$

Método 1.

Obtenemos primero el campo eléctrico producido por la esfera en el punto donde está situada la carga, q, a una distancia r del centro de la esfera. Para aplicar el teorema de Gauss, tomemos como superficie gaussiana una esfera concéntrica con la esfera cargada y de radio r . Por razones de simetría, en los puntos de esta esfera gaussiana el campo eléctrico será constante y radial, y hacia afuera por ser la carga de la esfera positiva, por lo que el flujo que la atraviesa es;

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E\cdot dS = E\cdot\oint_S dS = E\cdot S = E\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2$$

encerrando una carga Q_e, igual a la de la esfera; $Q_e = Q = 10^{-9}$ C, por lo que el teorema de Gauss, se escribe;

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} \;;\quad E\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \;;\quad E = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}$$

La fuerza electrostática que actúa sobre la carga $q = 2$ C, es;

$$\underline{F_e} = q\cdot E = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot Q}{r^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 10^{-9}}{2,2^2} = \underline{3,72 \text{ N}}$$

Método 2.

Para el estudio de su interacción con un cuerpo exterior, una esfera uniformemente cargada como la de este problema, se comporta como una carga puntual situada en su centro. Aplicando la ley de Coulomb, la fuerza entre dos cargas q y Q, situadas a una distancia r y que se comportan como puntuales, es;

$$\underline{F_e} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\,\frac{q\cdot Q}{r^2} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{2\cdot 10^{-9}}{2,2^2} = \underline{3,72 \text{ N}}$$

obteniéndose la misma expresión, y por lo tanto el mismo valor, que con el método anterior.

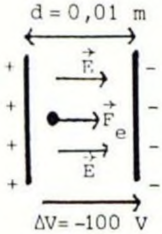
** 5.8 **

Septiembre 1986 - 2ª tanda - 2ª opción

Dos placas metálicas muy grandes están separadas una distancia de 1cm. y se mantienen a una diferencia de potencial de 100 V.

a) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico uniforme en la región situada entre las placas?.

b) ¿Qué trabajo se requiere para llevar una partícula con una carga de + 6,0 μC, desde la placa de potencial mas alto hasta la otra placa?.



a) Al ser el campo eléctrico uniforme y en la dirección normal a las placas, su módulo, E, es;

$$|\Delta V| = E\cdot d \ ; \quad E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{100}{0{,}01} = 10^4 \ \mathrm{N/C}$$

Obsérvese que E y d son siempre positivos y que $\Delta V = V_{final} - V_{inicial}$, puede ser negativo como en este caso. Aunque al aplicar la expresión anterior se considera, a veces, que ΔV es siempre positivo, esta simplificación no es adecuada en la segunda parte de este problema, ya que no quedaría claro quien realiza el trabajo.

b) Al desplazarse una carga positiva en el sentido de los potenciales decrecientes, su energía electrostática disminuye, por lo que el trabajo lo realiza el campo electrostático. De otra forma, si consideramos como positivamente cargada a la placa de mayor potencial y negativamente cargada a la de menor, la placa positiva repele a la carga dada y la negativa la atrae, moviendose hacia ella bajo la acción del campo eléctrico, hacia los potenciales decrecientes. Como ΔV = -100 V, el trabajo realizado por el campo es;

$$W_{campo} = q\cdot(-\Delta V) = 6\cdot 10^{-6}\cdot(-(-100)) = 6\cdot 10^{-4} \ \mathrm{J.}$$

Pero el enunciado del problema pide el trabajo realizado por un agente externo al campo, que será;

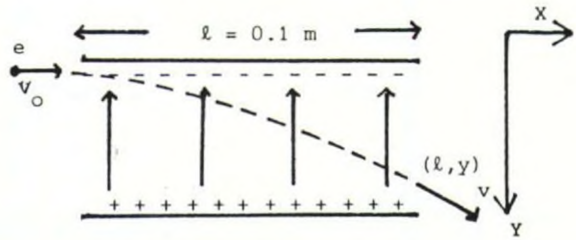
$$W_{externo} = q\cdot\Delta V = 6\cdot 10^{-6}\cdot(-100) = -6\cdot 10^{-6} \ \mathrm{J.}$$

El signo menos indica que no es cierto que hay que realizar un trabajo aplicando una fuerza externa, para llevar una carga positiva en el sentido decreciente del potencial, sino que el trabajo es realizado por dicho campo.

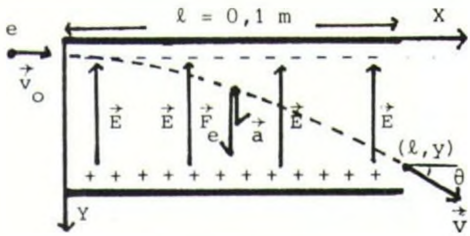
** 5.9 **

Junio 1988 - 2ª tanda - 2ª opción.

Un electrón ($q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C; $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg.), con una velocidad inicial $v_o = 3 \times 10^6$ m/s, como se indica en la figura, entra en una región en la que hay un campo eléctrico uniforme $E = 2 \times 10^3$ N/C.



a) ¿Cuál es el valor de la aceleración que adquiere el electrón al ser introducido en el interior de dicho campo?. b) Determinar el tiempo que tarda el electrón en atravesar la región de campo eléctrico uniforme. c) ¿A que distancia, y, emergerá el electrón fuera del campo eléctrico uniforme? d) ¿Cuál es la velocidad del electrón cuando emerge del campo eléctrico?



Al iniciarse el problema se completará el dibujo, indicando que tanto la fuerza electrostática que actua sobre el electrón como la aceleración que le produce, son paralelos al campo eléctrico pero en sentido contrario. Como el punto de salida del electrón de la región en la que actúa el campo eléctrico se ha denominado (ℓ,y), el origen de coordenadas ha de tomarse en el punto de entrada y no en un punto arbitrario como parece indicar la figura.

a) El valor de la fuerza electrostática que actúa sobre el electrón es $F_e = q \cdot E$, por lo que el valor de la aceleración es;

$$\underline{a} = \frac{F_e}{m_e} = \frac{q_e}{m_e} \cdot E = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} \; 2 \cdot 10^3 = \underline{3{,}52 \cdot 10^{14} \text{ m/s}}$$

Se ha considerado q_e positivo porque se está calculando el valor, el módulo, de la aceleración cuya dirección y sentido ya se han indicado.

b) Para responder a las restantes preguntas, hemos de escribir las ecuaciones del movimiento, teniendo en cuenta que la componente X corresponde a un movimiento uniforme y la Y a un movimiento uniformemente acelerado, siendo su trayectoria parabólica:

$$\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ v_x = v_o = 3\cdot10^6 \\ x = v_o\cdot t = 3\cdot10^6\cdot t\,(*) \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} a_y = a = 3{,}52\cdot10^{14} \\ v_y = a\cdot t = 3{,}52\cdot10^{14}\cdot t \quad (\&) \\ y = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = 1{,}76\cdot10^{14}\cdot t\,(**) \end{array}\right.$$

Cuando el electrón acaba de atravesar la región; $x = \ell = 0{,}1$ m ; $t = t_f$, por lo que de (*) se tiene;

$$0{,}1 = 3\cdot10^6\cdot t_f \;;\quad \underline{t_f} = \frac{0{,}1}{3\cdot10} = \underline{3{,}33\cdot10^{-8} \text{ s}}$$

c) Sustituyendo el valor de t_f en (**), se tiene;

$$\underline{y} = 1{,}76\cdot10^{14}\cdot(3{,}33\cdot10^{-8})^2 = \underline{0{,}20 \text{ m}}$$

d) De las ecuaciones de movimiento se sabe que $v_x = 3\cdot10^6$, y sustituyendo t_f en (&), se tiene;

$v_y = 3{,}52\cdot10^{14}\cdot3{,}33\cdot10^{-8} = 11{,}73\cdot10^6$, por lo que

$$\underline{\vec{v}} = (3\cdot10^6, 11{,}73\cdot10^6) \text{ m/s} = 3\cdot10^6\cdot\vec{u}_x + 11{,}73\cdot10^6\cdot\vec{u}_y \text{ m/s}$$

y como $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 12{,}11$ m/s y $\text{tag}\,\theta = v_y/v_x = 3{,}91$; $\theta = 75^o\ 39'\ 14''$.

El valor de la velocidad es 12,11 m/s y su vector forma con el eje X un angulo θ positivo igual a $75^o\ 39'\ 14''$.

NOTA: Las ecuaciones de movimiento tambien pueden escribirse;

$$\left|\begin{array}{l} \vec{a} = (0, \quad 3{,}52\cdot10^{14}) \\ \vec{v} = (3\cdot10^6, \quad 3{,}52\cdot10^{14}\cdot t) \\ \vec{r} = (3\cdot10^6\cdot t, \quad 1{,}76\cdot10^{14}\cdot t^2) \end{array}\right.$$

como hemos utilizado en otros problemas. Utilizamos diferentes notaciones , adaptándonos a la forma en que el problema da los datos, para que el alumno no se encasille en una y sepa utilizar la que le resulte más adecuada.

** 5.10 **

Julio 1981 - 2ª tanda - 2ª opción.

Se lanza un electrón con una velocidad de $10^7 ms^{-1}$ en dirección perpendicular al campo creado entre dos placas paralelas separadas 1 cm, de longitud 2 cm y con una diferencia de potencial de 100 V entre ellas.

a) Hallar su desviación transversal y su velocidad transversal cuando emerge de las placas.

b) Si se coloca una pantalla perpendicular a 0,5 m a la derecha del extremo de las placas ¿a qué posición sobre la pantalla llega el electrón?.

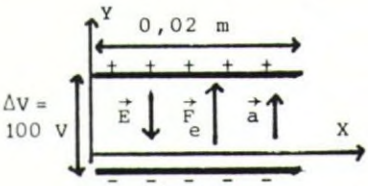


figura a

En este problema, la distancia entre las placas es comparable a sus longitudes, por lo que el efecto de borde es considerable y el campo no es uniforme. Sin embargo, consideraremos que el campo es uniforme aunque esto no sea una buena aproximación, ya que a este nivel, no es posible realizar un estudio más preciso.

Al tener el electrón carga negativa, actuará sobre él una fuerza uniforme de igual dirección que el campo, pero en sentido opuesto, es decir, normal a las placas y dirigida hacia la más positiva. Por ello el valor de la aceleración es;

$$a = \frac{F_e}{m_e} = \frac{e \cdot E}{m_e} = \frac{e}{m_e} \cdot \frac{|\Delta V|}{d} = 1,7588 \cdot 10^{11} \cdot \frac{100}{0,01} = 1,759 \cdot 10^{15}$$

Si no se conoce el valor de la relación e/m_e, ni los de e y m_e, puede dejarse la respuesta en función de estas constantes.

a) Para responder a estas preguntas hay que resolver un sencillo problema de cinemática, para lo que tomaremos el sistema de referencia de la figura a.

$$\left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 1,759 \cdot 10^{15} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} v_x = 10^7 \\ v_y = 1,759 \cdot 10^{15} \cdot t \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x = 10^7 \cdot t \\ y = 8,975 \cdot 10^{14} \cdot t^2 \quad (*) \end{array} \right.$$

Cuando el electrón emerge de las placas $t = t_e$; $x = 0,02 = 10^7 \cdot t_e$

$t_e = \frac{0,02}{10} = 2 \cdot 10^{-9}$ y la desviación transversal;

$$\Delta y = y_e = 8,974 \cdot 10^{14} \cdot t_e^2 = 8,974 \cdot 10^{14} \cdot (2 \cdot 10^{-9})^2 = 3,518 \cdot 10^{-3}$$

Sustituyendo t_e en (*), obtenemos la velocidad transversal al emerger de las placas; $V_{ye} = 1,759\cdot10^{15}\cdot2\cdot10^{-9} = 3,52\cdot10^6$

Desviación transversal; $\Delta y = 3,518$ mm

Velocidad transversal $V_{ye} = 3,52\cdot10^6$ m/s

Estas preguntas tienen respuestas, porque la desviación transversal obtenida es menor que la distancia entre las placas. En el enunciado no se especifica por qué punto penetra el electrón, pudiéndolo hacer, para que el enunciado sea posible, por cualquier punto que diste más de 3,518 mm de la placa más positiva y en particular, por el punto medio que dista 5mm.

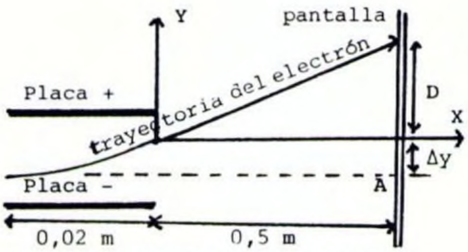


FIGURA NO REALIZADA A ESCALA

Una vez que el electrón emerge de las placas, no actúan fuerzas sobre él, si despreciamos las de rozamiento y la de gravitación terrestre (ver nota al final), por lo que su movimiento será rectilineo y uniforme.

Para simplificar, tomaremos nuevos orígenes para el espacio y el tiempo, midiendo el tiempo desde el instante en que emerge el electrón y situando el origen de coordenadas en el punto por el que emerge. La velocidad inicial del electrón es la de incidencia; $v_{x0} = v_{xe} = 10^7$ y la transversal, $v_{yo} = v_{ye} = 3,52\cdot10^6$,según fué calculada. Las ecuaciones de este nuevo movimiento son;

$$\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} v_x = 10^7 \\ v_y = 3,52\cdot10^6 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x = 10^7\cdot t \\ y = 3,52\cdot10^6\cdot t \end{array}\right.$$

y al llegar el electrón a la pantalla, $t = t_p$, y

$$\left|\begin{array}{l} x_p = 0,5 = 10^7\cdot t_p \\ y_p = D = 3,52\cdot10^6\cdot t_p \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} t_p = 0,5/10^7 = 5\cdot10^{-8} \\ D = 3,52\cdot10^6\cdot5\cdot10^{-8} = 0,176 \end{array}\right.$$

La posición del electrón sobre la pantalla , la mediremos desde la posición a la que llegaría sino existiera el campo eléctrico, el punto A, por lo que es igual a ;

$$\Delta y + D = 3,518\cdot10^{-3} + 0,176 = 0,180 \text{ m} \quad ó \quad \underline{180 \text{ mm}}$$

NOTA: En el enunciado no se menciona la orientación de las placas respecto de la vertical, por lo que en este aspecto, las figuras son completamente arbitrarias. Pero las fuerzas gravitatorias sobre partículas elementales son, en general, despreciables frente a las electrostáticas. Para comprobar esto, comparemos el peso del electron ($p_e = m_e \cdot g = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9{,}8 = 8{,}9 \cdot 10^{-30}$ N) con la fuerza electrostática ejercida sobre él ($F_e = e \cdot |\Delta V| / d = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 100/0{,}01 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ N), que es del orden de 10^{10} veces mayor que el peso. Por esto queda justificado el no considerar el peso en el apartado a). En el apartado b), la aceleración gravitatoria haría que la posición del electrón en la pantalla descienda en $g \cdot t_p^2 / 2 = 9{,}8 \cdot (5 \cdot 10^{-8})^2 / 2 = 1{,}2 \cdot 10^{-14}$ m ó $1{,}2 \cdot 10^{-11}$ mm, que es muchísimo menor que D y que Δy, por lo que resulta claramente despreciable.

7. CAMPO ELÉCTRICO (II)

** 7.1 **

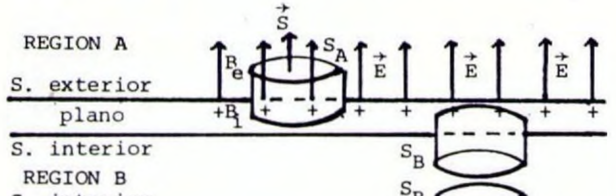
Junio 1989 - 2ª tanda -obligatoria - 2ª opción - problema 2.

Dos planos indefinidos y paralelos entre sí, se encuentran separados una distancia d. Calcular el campo eléctrico en las tres regiones del espacio que determinan ambos planos, suponiendo que éstos tienen una densidad superficial de carga eléctrica σ C/m.

Para que pueda hablarse de "densidad superficial de carga eléctrica", la carga debe distribuirse en una capa muy delgada adyacente a las superficies del plano, como ocurre en el caso de un plano conductor cargado y en equilibrio, lo que supondremos en la opción a. Para simplificar el desarrollo del problema, supondremos que $\sigma > 0$, cambiando el sentido del campo electrico $\vec{E}$, si $\sigma < 0$. Adviértase que σ en el S.I. de unidades, se mide en C/m^2 y no en C/m como indica el enunciado.

Opción a.

Al ser los planos indefinidos, cualquier punto situado a una distancia finita de los planos puede considerarse como muy próximo, por lo que el campo eléctrico $\vec{E}$, en el caso de no ser nulo, es normal a los planos. Como la distancia d entre los planos es finita, puede considerarse igualmente como muy pequeña, dado que los planos son indefinidos. Por ello, y al tener cargas del mismo signo, estas se repelen y se situan en la cara o superficie del plano situada en el exterior del sistema.



PLANOS CONDUCTORES CARGADOS Y EN EQUILIBRIO.

Para calcular el campo eléctrico en un punto de la región A o C, tomemos como superficie gaussiana, S_A o S_C, un cilindro cuyas bases, de superficie S, son paralelas a los planos, una situada en el interior del plano más próximo, B_i, y la otra, B_e, centrada en el punto. Como el campo eléctrico en el interior de un conductor cargado y en equilibrio es nulo, tambien es nulo el flujo a través de la base B_i. Igualmente es nulo el flujo a través de la superficie lateral del cilindro al ser el campo eléctrico paralelo a dicha superficie. Por lo tanto, el flujo que atraviesa esta superficie gaussiana, es sólo el que atraviesa la base B_e ; $\Phi = \vec{E}\cdot\vec{S} = E\cdot S$, y como la carga encerrada es $Q_e = \sigma\cdot S$, el teorema de Gauss se escribe;

$$\Phi = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} \; ; \quad E\cdot S = \frac{\sigma\cdot S}{\varepsilon_0} \; ; \quad \underline{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \quad \text{Regiones A y C}$$

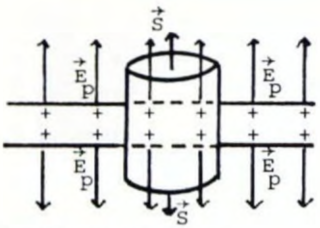
expresión que no depende de la distancia del punto al plano y que coincide con la de un campo eléctrico en la proximidad de un conductor cargado y en equilibrio.

Podría objetarse que cada plano contribuye en cada punto de la región A y C con un campo de igual dirección y sentido y de valor σ/ε_0, por lo que el campo total sería el doble, es decir, $2\cdot\sigma/\varepsilon_0$. Pero no hay que olvidar que las cargas de los planos interaccionan entre sí y los planos se apantallan mutuamente. En el caso de un plano conductor aislado, la carga se distribuye en las dos superficies y en el caso de estos dos planos, toda la carga está en la superficie exterior, por lo que si la carga de cada plano es constante, la densidad superficial de carga es diferente. El campo en las regiones A y C no variaría si los dos planos se juntasen formando uno solo que tendría una densidad superficial de carga σ en cada una de sus dos superficies.

Para calcular el campo eléctrico en un punto de la región B, tomemos como superficie gaussiana un cilindro similar a los anteriores pero en la región B; S_B en la figura. La carga encerrada por el cilindro es nula ya que no hay carga próxima a la superficie interior y según el teorema de Gauss; $\Phi = \vec{E}\cdot\vec{S} = E\cdot S = Q_e = 0$, por lo que el campo en la región B es nulo.

Opción b.

Si los planos fuesen dieléctricos uniformente cargados, no puede hablarse propiamente de densidad superficial de carga ya que la carga está distribuida por todo el dieléctrico y no sólo por su superficie. En este caso puede definirse la carga por unidad de superficie que también llamaremos σ; $\sigma = Q/S$.



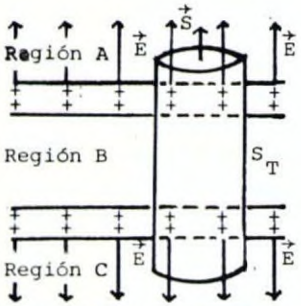
PLANO DIELECTRICO
UNIFORMEMENTE CARGADO
Y EN EQUILIBRIO

Para obtener el campo eléctrico E_p originado independientemente por cada plano, tomaremos como superficie gaussiana, la de un cilindro de bases paralelas al plano, de superficie S , situadas en el exterior y equidistantes del plano. Al ser el campo electrico $\vec{E}_p$ paralelo a la superficie laterial del cilindro no la atraviesa, por lo que el flujo a través de la superficie del cilindro es igual al flujo que atraviesa sus bases; $\Phi = 2 \cdot \vec{E}_p \cdot \vec{S} = 2 \cdot E_p \cdot S$ y como la carga encerrada es $Q_e = \sigma \cdot S$, según el teorema de Gauss;

$$\Phi = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} \quad ; \quad 2 \cdot E_p \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \quad ; \quad E_p = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

que no depende de la distancia del punto al plano.

Por el principio de superposición, el campo debido a los dos planos, es la suma de los campos producidos por cada uno, siempre que la distribución de carga no se modifique (lo que no ocurría al considerar que los planos fuesen conductores).



PLANOS DIELECTRICOS

En las regiones A y C los campos originados por cada plano tienen igual valor, dirección y sentido, por lo que el campo total $\vec{E}$, tiene por módulo;

$$\underline{E} = 2 \cdot E_p = 2 \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} = \underline{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

que es el mismo resultado que se obtendría aplicando el teorema de Gauss a la superficie gaussiana S_T para obtener el campo electrico total $\vec{E}$.

En la región B el campo electrico total $\vec{E}$, se anula ya que los campos $\vec{E}_p$ debido a cada plano tienen igual valor y dirección pero sentidos opuestos.

El resultado en ambas opciones es el mismo:

* En la región entre las placas (B) el campo eléctrico es nulo.
* En las otras dos regiones (A y C) el campo es normal a los planos y hacia fuera del más próximo si $\sigma > 0$ (lo que hemos supuesto) y hacia dentro si $\sigma < 0$, y su valor es σ/ε_0 N/C

** 7.2 **

Septiembre 1989 - optativa - 1ª opción - problema 2

Dado dos planos infinitos, que se cortan perpendicularmente, cargados eléctricamente con densidades de carga σ_1 y σ_2 C/m ,respectivamente, cálcular el campo eléctrico en un punto P no contenido en ninguno de los planos.

El enunciado no especifica la naturaleza de los planos por lo que supondremos en la opción a. que los planos son conductores cargados y en equilibrio y en la opción b. que son dieléctricos uniformentes cargados. Al ser los planos infinitos, cualquier punto a distancia finita de ambos planos puede considerarse muy próximo a ellos.

Opción a.

Si los planos son conductores, σ_1 y σ_2 se referirán a la densidad superficial de carga eléctrica que en el S.I. de unidades se mide en C/m^2 y no en C/m como indica el enunciado. En la zona de los planos, próxima a su intersección, las cargas se repeleran si σ_1 y σ_2 tienen el mismo signo , por lo que la densidad de carga en esa zona será menor que en el resto, o por el contrario será mayor si las cargas se atraen al ser σ_1 y σ_2 de signos diferentes. Pero de acuerdo con el enunciado supondremos que σ_1 y σ_2 son constantes, al menos en las zonas que pueden afectar al punto P.

Como un plano conductor tiene dos superficies, supondremos que la situada frente al punto P tiene una densidad σ_1 ó σ_2, siendo la carga de la otra cara irrelevante para el problema.

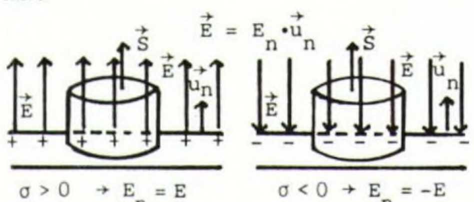


Figura 1. PLANO CONDUCTOR

Para calcular el campo eléctrico en la proximidad de un conductor cargado y en equilibrio, tomemos como superficie gaussiana la de un cilindro cuyas bases de superficie S son paralelas al plano, una situada en su interior y la otra en su exterior frente a la superficie cargada. El campo será normal al conductor y dirigido hacia afuera si $\sigma > 0$ ó hacia el conductor si $\sigma < 0$, por lo que escribiremos $\vec{E} = E_n \cdot \vec{u}_n$, donde $\vec{u}_n$ es un vector unitario normal a la superficie del conductor y hacia afuera y E_n es la componente de $\vec{E}$ normal al conductor, pudiendo ser positiva o negativa, es decir; $E_n = \pm E$.

El campo eléctrico no atraviesa la superficie lateral del cilindro al ser paralelo a ella, ni la base situada en el interior del conductor ya que el campo eléctrico allí es nulo, por lo que el campo sólo atraviesa la base situada en el exterior, por lo que el flujo eléctrico es; $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E_n \cdot \vec{u}_n \cdot \vec{S} = E_n \cdot S$, y la carga eléctrica encerrada es $Q_e = \sigma \cdot S$, por lo que el teorema de Gauss se escribe;

$$\Phi = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} \quad ; \quad E_n \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \quad ; \quad E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_n \qquad (*)$$

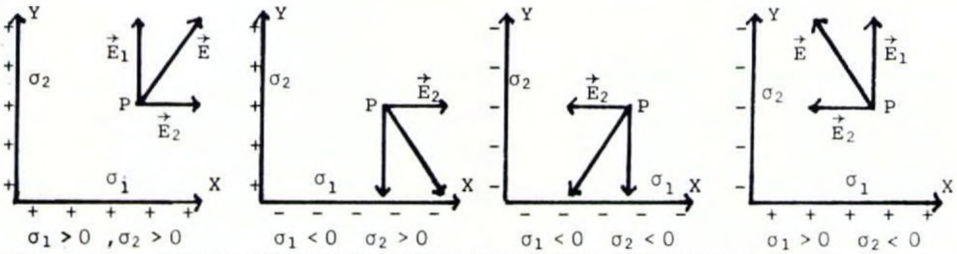


Figura 2. PLANOS CONDUCTORES INFINITOS Y PERPENDICULARES

Consideremos que los planos se situan como en la figura 2, haciendolos coincidir con los planos coordenados, de modo que las coordenadas x e y del punto P sean positivas (la coordenada z no influye). Por ello, y de acuerdo con (*);

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_y \quad \text{y} \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_y + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_x + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_y \qquad (**)$$

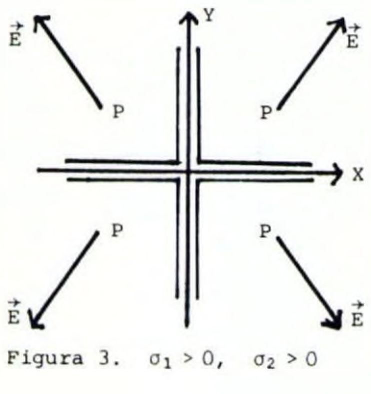


Figura 3. $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$

siendo esta expresión valida cualesquiera que sean los signos de σ_1 y σ_2 pero depende del sistema de referencia elegido y es válida sólo si las coordenadas del punto son positivas.

Si las coordenadas del punto no son positivas, la expresión anterior se escribe;

$$\vec{E} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{|x|}\ \vec{u}_x + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{y}{|y|}\ \vec{u}_y \qquad (***)$$

como puede comprobarse en la figura 3; dependiendo del sistema de referencia elegido.

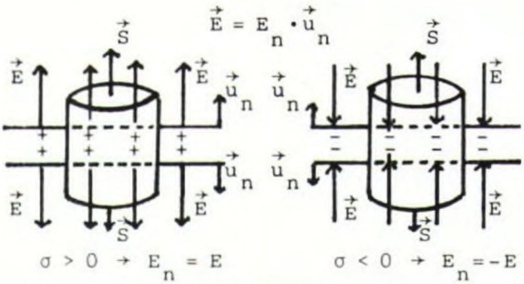


Figura 4. PLANO DIELECTRICO

Opción b.

Si el plano es de dieléctrico uniformemente cargado, la densidad de carga ha de interpretarse como carga por unidad de superficie, $\sigma = Q/S$, que en el S.I. de unidades se mide igualmente en C/m^2.

Para calcular el campo eléctrico en un punto próximo al dieléctrico, tomemos como superficie gaussiana la de un cilindro de bases paralelas, equidistantes y exteriores al plano. Como el campo eléctrico es normal al plano, no atraviesa la superficie lateral del cilindro, por lo que el flujo es;

$$\Phi = 2\cdot(\vec{E}\cdot\vec{S}) = 2\cdot E_n\cdot\vec{u}_n\cdot\vec{S} = 2\cdot E_n\cdot S$$

y como la carga encerrada es $Q_e = \sigma\cdot S$, según el teorema de Gauss;

$$\Phi = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} \quad ; \quad 2\cdot E_n\cdot S = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad ; \quad E_n = \frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0} \quad ; \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0}\cdot\vec{u}_n \qquad (+)$$

desarrollándose el resto del problema como en la opción a. En el caso en que $x > 0$ y $y > 0$, en lugar de (**) se tiene;

$$\vec{E} = \frac{\sigma_2}{2\cdot\varepsilon_0}\cdot\vec{u}_x + \frac{\sigma_1}{2\cdot\varepsilon_0}\cdot\vec{u}_y \qquad (++)$$

y en el caso general, en lugar de (**) se obtiene;

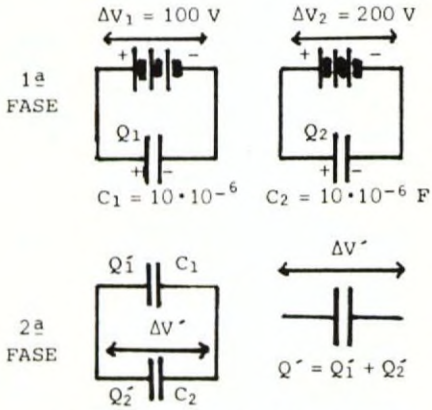
$$\vec{E} = \frac{\sigma_2}{2\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{|x|}\cdot\vec{u}_x + \frac{\sigma_1}{2\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{y}{|y|}\cdot\vec{u}_y \qquad (+++)$$

Obsérvese que las expresiones obtenidas en las dos opciones difieren sólo en el factor 1/2.

** 7.3 **

Julio 1983 - 1ª tanda - 2ª opción.

Un condensador de 10µF. se carga a un potencial de 100V. y otro de 20µF a 200V. Si se conectan ambos condensadores en paralelo ¿Cual será la diferencia de potencial entre las placas? ¿Cuál será la carga de cada condensador?.



CONDENSADORES EN PARALELO   CONDENSADOR EQUIVALENTE

En la experiencia descrita en el enunciado, se distinguen dos fases. En la primera se cargan los condensadores conectando cada uno de ellos a una diferencia de potencial, a una fuente de corriente continua, diferente. Como $C = Q/\Delta V$, la carga que adquiere cada condensador viene dada por $Q = C \cdot \Delta V$ (*)

y empleando las notaciones de la figura, resulta;

$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V_1 = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 10^{-3}$

$Q_2 = C_2 \cdot \Delta V_2 = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 4 \cdot 10^{-3}$

Una vez desconectados los condensadores de las fuentes que permitieron cargarlos, los conectamos en paralelo entre sí, es decir, las placas positivas de los condensadores entre sí e igualmente las negativas entre sí (2ª fase). Las cargas se redistribuyen ahora entre los dos condensadores, por lo que $Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2$. Esta asociación de condensadores equivale a un condensador único cuya capacidad es $C = C_1 + C_2 = 10 \cdot 10^{-6} + 20 \cdot 10^{-6} = 30 \cdot 10^{-6}$ F, cuya carga es la del sistema; $Q = Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-3}$ y la diferencia de potencial entre sus placas es

$$\Delta V' = \frac{Q'}{C} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-6}} = 166,7 \text{ V}$$

que será igualmente la del sistema de los dos condensadores en paralelo. Pero al estar los condensadores conectados en paralelo, la diferencia de potencial entre las armaduras de cada uno es la del sistema, es decir, $\Delta V'$

La diferencia de potencial entre las placas es <u>166,7 V.</u>

Aplicando nuevamente la expresión (*) a cada condensador;

$$Q_1' = C_1 \cdot \Delta V' = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 166,7 = 1,667 \cdot 10^{-3} \text{ C} = 1,667 \text{ mC}$$

$$Q_2' = C_2 \cdot \Delta V' = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 166,7 = 3,333 \cdot 10^{-3} \text{ C} = 3,333 \text{ mC}$$

El condensador de 10 μF adquiere una carga de 1,667 mC y el de 20 μF adquiere una de 3,333 mC.

Si se realiza está experiencia saltará una chispa y/o se calentaran los conductores, al conectarlos, ya que la energía del sistema es menor que la suma de la de ambos condensadores antes de la conexión, como puede comprobarse aplicando la expresión;

Energía almacenada en un condensador $= Q \cdot \Delta V/2$

Aunque la anterior interpretación del enunciado es la más usual, tambien pueden conectarse las placas de diferente signo entre sí, es decir, la positiva de cada condensador con la negativa del otro. En este caso;

$$Q' = |Q_1 - Q_2| = |Q_2 - Q_1| = |4 \cdot 10^{-3} - 10^{-3}| = 3 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

y el resto del problema se resuelve de forma similar, obteniendose;

$$\Delta V' = \frac{Q'}{C} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ V.}$$

$$Q_1' = C_1 \cdot \Delta V' = 10 \cdot 10^{-3} . 100 = 10^{-3} \text{ C} = 1 \text{ mC}$$

$$Q_2' = C_2 \cdot \Delta V' = 20 \cdot 10^{-3} . 100 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ C} = 2 \text{ mC}$$

En la práctica los condensadores se cargan después de conectarse e instalarse en el circuito, aunque la experiencia descrita en el problema es muy instructiva y fácil de realizar. En este último caso, la chispa sería mucho mayor ya que el sistema conserva bastante menos energía. Advirtamos que al cargar un condensador electrolítico hay que respetar su polaridad, por lo que esta segunda conexión (uniendo los polos de diferente signo) no debe realizarse con condensadores electrolíticos ya que el condensador 1, el de menor carga inicial, debería cambiar de polaridad y se dañaría.

8. CAMPO MAGNÉTICO

** 8.0 ** NOTA INICIAL

Para obtener el sentido del campo magnético, vector B o vector inducción magnética, originado por una corriente eléctrica al circular por un hilo conductor, pueden aplicarse las siguientes reglas:

REGLA A: Campo magnético originado por una ESPIRA, BOBINA o SOLENOIDE.

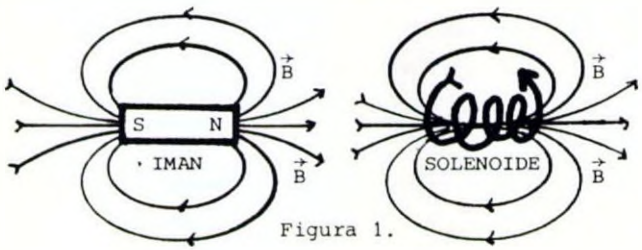


Figura 1.

Figura 2.

Al igual que en un imán, las líneas de fuerza del campo magnético originado por la corriente al recorrer una espira, bobina o solenoide, sale por su polo o cara norte, y entra por el polo o cara sur. El que una cara de la espira o bobina sea norte o sur depende del sentido de la corriente y es fácil de identificar mediante la siguiente regla:

El polo o cara norte de la espira o bobina es aquella en la que puede inscribirse una N y la sur en la que se inscribe una S, respetando en ambos casos el sentido de la corriente, como se muestra en la figura 2. En ella se representa por ⊙, un vector perpendicular al plano del dibujo y hacia afuera ra y por ⊗ , si es perpendicular al papel pero hacia adentro.

REGLA B: Campo magnético originado por un conductor RECTILINEO E INDEFINIDO

Las líneas de fuerza del campo magnético originado al recorrer la corriente un conductor rectilíneo e indefinido, son círculos concéntricos con el conductor. Para determinar

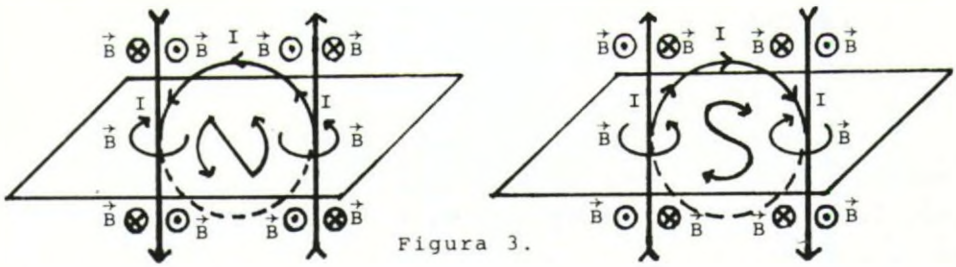


Figura 3.

su sentido puede dibujarse una espira tangente al conductor (figura 3). El sentido del campo originado por el conductor rectilíneo coincide con el del creado por el elemento que tiene en común con la espira, tal como se indica en la figura 3. La aplicación de esta regla es independiente de que la espira sea "N" o "S" aunque es aconsejable utilizar siempre el mismo tipo de espira.

** 8.1 **

Julio 1982 - 2ª tanda - 1ª opción.

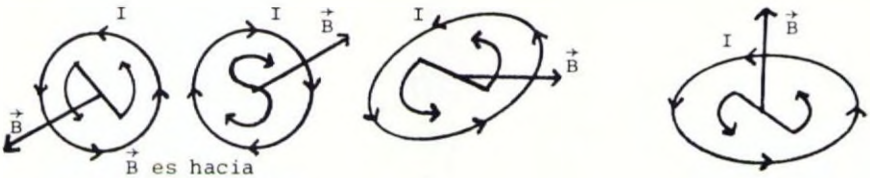
¿Cuál es la inducción magnética en el centro de una bobina circular, plana, de 100 espiras, de radio 152 cm. que conduce una corriente de 6,28 A?. Indicar con auxilio de un esquema el sentido de este campo. Permeabilidad del vacío $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} J \cdot s^2 \cdot C^{-2} \cdot m^{-1}$

El considerar la bobina plana o de grosor despreciable equivale a situar las 100 espiras en un mismo plano, y las supondremos de igual radio ya que el enunciado sólo da un valor para él, por lo que; $B_{bobina} = 100 \cdot B_{espira}$

Recordando la expresión del campo magnético originado por una corriente de intensidad I al recorrer una espira circular de radio R; $B_{espira} = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}$ (*)

$$\underline{B_{bobina}} = 100 \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R} = 100 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 6{,}28}{2 \cdot 1{,}52} = \underline{2{,}60 \cdot 10^{-4}\ \text{T (teslas)}}$$

El sentido del campo viene dado por la regla A de la nota inicial (8.0), como se muestra en cualquiera de los cuatro esquemas de la figura de la página siguiente, entre otros.



$\vec{B}$ es hacia

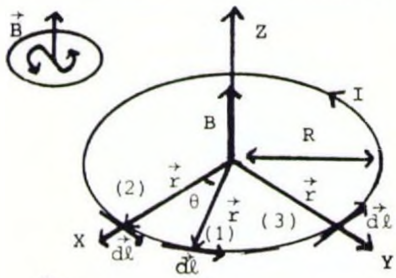
afuera adentro

SENTIDO del campo magnético originado por una BOBINA PLANA

Aunque la forma anterior es la "más sencilla o rápida" de resolver el problema, es más instructivo obtener (*) a partir de la ley de Biot-Savart

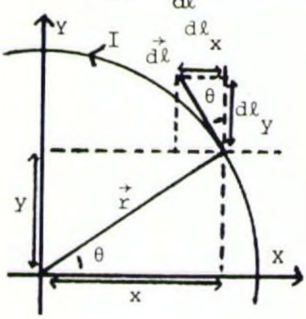
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I\cdot d\vec{\ell} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \qquad (**)$$

donde $\vec{r}_1$ es el vector de posición del elemento de corriente y $\vec{r}_2$ el del punto donde se calcula el campo, es decir, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ es el vector de posición del punto donde se calcula el campo respecto del elemento de corriente. La expresión anterior se simplifica mucho si tomamos el origen de coordenadas en el centro de la espira, es decir, el punto donde se calcula el campo, por lo que $\vec{r}_2 = 0$, $\vec{r}_1 = \vec{r}$, siendo $\vec{r}$ un vector que coincide con el radio y hacia afuera, y $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -\vec{r}$; resultando;



$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\,\frac{I\cdot d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3} \qquad (***)$$

Tomando el sistema de referencia de la figura, al estar la espira en el plano XY, $d\vec{B}$ tendrá la dirección del eje Z.



De la figura (posición 1);

$\vec{r} = (r\cdot\cos\theta \; , \; r\cdot\mathrm{sen}\theta \; , \; 0)$ y

$d\vec{\ell} = (-\,d\ell\cdot\mathrm{sen}\theta \; , \; d\ell\cdot\cos\theta \; , \; 0)$ por lo que

$d\vec{\ell}\times\vec{r} =$

$(-d\ell\cdot\mathrm{sen}\theta, d\ell\cdot\cos\theta, 0)\times(r\cdot\cos\theta, r\cdot\mathrm{sen}\theta, 0) =$

$(0 \; , \; 0 \; , \; -d\ell\cdot r) = -d\ell\cdot r\cdot\vec{u}_z$ (&)

El producto vectorial puede obtenerse fácilmente mediante la regla nemotécnica del determinante. Resulta más sencillo considerar uno de los casos particulares indicados en la figura; (2) $d\vec{\ell} = d\ell\cdot\vec{u}_y$; $\vec{r} = r\cdot\vec{u}_x$; $d\vec{\ell}\times\vec{r} = d\ell\cdot\vec{u}_y \times r\cdot\vec{u}_x = d\ell\cdot r\cdot\vec{u}_y\times\vec{u}_x = d\ell\cdot r\cdot(-\vec{u}_z) = -\,d\ell\cdot r\cdot\vec{u}_z$ ó el (3) $d\ell = -d\ell\cdot\vec{u}_x$ y $\vec{r} = r\cdot\vec{u}_y$

Sustituyendo (&) en (***)

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I\cdot(-d\ell\cdot r\cdot\vec{u}_z)}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I\cdot d\ell}{r^2}\cdot\vec{u}_z$$

e integrando a toda la espira;

$$\vec{B} = \int_{espira}\frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I\cdot d\ell}{r^2}\cdot\vec{u}_z = \frac{I\cdot\mu_0}{4\cdot\pi\cdot r^2}\int_{espira} d\ell\cdot\vec{u}_z = \frac{I\cdot\mu_0}{4\cdot\pi\cdot r^2}\cdot\ell_{espira}\cdot\vec{u}_z$$

$$= \frac{\mu_0\cdot I}{4\cdot\pi\cdot r^2}\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot\vec{u}_z = \frac{I\cdot\mu_0}{2\cdot r}\cdot\vec{u}_z \quad \text{(siendo } r = R \text{ ó radio)}$$

cuyo valor coincide con el dado por la expresión (*) que "recordamos antes" y cuyo sentido es el obtenido con la regla (8.0).

Puede objetarse que "ésto es teoría", lo cual no es cierto. Esto es solamente una de las aplicaciones más sencilla y fácil de la ley de Biot-Savart, que el alumno ha de repetir cada vez que necesite la fórmula hasta que su obtención no le presente dificultad. El alumno ha de adquirir destreza en la aplicación de las fórmulas fundamentales, pues de lo contrario los problemas de Física se reducen a la aplicación numérica de un sinfín de fórmulas memorizadas.

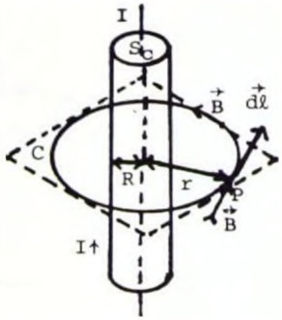
** 8.2 **

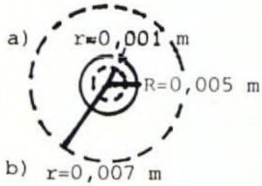
Junio 1989 - 2ª tanda - obligatoria - 1ª opción - problema 2.

Por un conductor cilíndrico de 0.5 cm de radio, circula una corriente de 100 A, uniformemente distribuida en toda su sección recta. Hallar el campo magnético: a) en un punto situado a 0.1 cm del eje del conductor. b) En un punto situado en el exterior del conductor, a 0.2 cm de la superficie del mismo.

Para calcular el campo magnético en un punto, P, que dista r del eje del conductor, aplicaremos la ley de Ampere calculando la circulación del vector campo magnético, $\vec{B}$, según una circunferencia de radio r , concéntrica con el conductor y que pasa por dicho punto;

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\cdot I_a$$





donde I_a es la intensidad que atraviesa la superficie limitada por la circunferencia C, que como se sabe es una linea de fuerza por lo que $\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B\cdot d\ell$, si se recorre en el sentido de $\vec{B}$. Dada la simetría, B es constante en todo los puntos de C, por lo que;

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint_C B\cdot d\ell = B\cdot\oint_C d\ell = B\cdot 2\cdot\pi\cdot r = \mu_0\cdot I_a$$

$$B = \frac{\mu_0\cdot I_a}{2\cdot\pi\cdot r} = 2\cdot\frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I_a}{r} \qquad (*)$$

ya que resulta más facil recordar que en en el S.I., $\mu_0/4\cdot\pi = 10^{-7}$ T·m/A que el valor de μ_0. Ahora podemos aplicar la expresión (*) a la resolución de los dos casos propuestos en el enunciado, que difieren en los valores de I_a y de r.

a) Al ser $r < R$, el punto P está en el interior del conductor y $I_a \neq I$. Como la corriente está uniformemente distribuida en la sección recta del conductor (su area es S_c; $S_c = \pi\cdot R^2 = \pi\cdot 0{,}005^2 = \pi\cdot 25\cdot 10^{-6}$ m²), la densidad de corriente, J, es constante en dicha sección, por lo que su valor es; $J = I/S_c$. La intensidad que atraviesa el círculo, limitado por C, de radio r ($r = 0{,}001$ m) cuya superficie $S_p = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot 0{,}001^2 = \pi\cdot 10^{-6}$ m , es ;

$$I_a = J\cdot S_p = S_p\cdot\frac{I}{S_c} = I\cdot\frac{S_p}{S_c} = 100\cdot\frac{\pi\cdot 10^{-6}}{\pi\cdot 25\cdot 10^{-6}} = 4 \text{ A.}$$

y sustituyendo en (*);

$$\underline{B} = 2\cdot\frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I_a}{r} = 2\cdot 10^{-7}\cdot\frac{4}{10^{-3}} = \underline{8\cdot 10^{-4} \text{ T.}}$$

b) En este caso, el radio de la circunferencia es $r = 0{,}005 + 0{,}002 = 0{,}007$ m y al ser $r > R$, toda la intensidad que circula por el conductor atraviesa la superficie limitada por C, por lo que $I_a = I = 100$ A y sustituyendo en (*);

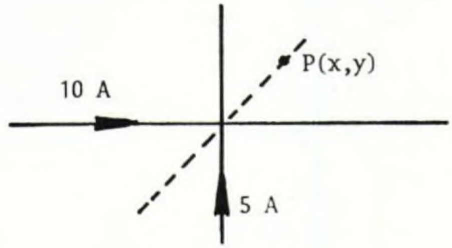
$$\underline{B} = 2\cdot\frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I_a}{r} = 2\cdot 10^{-7}\cdot\frac{100}{0{,}007} = 28{,}6\cdot 10^{-4} \text{ T} = \underline{2{,}86\cdot 10^{-3} \text{ T}}$$

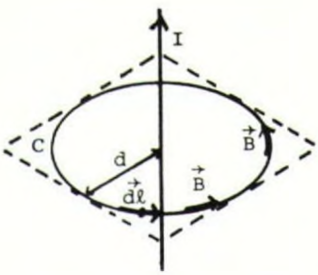
Este sencillo problema nos aclara el significado de I_a, la intensidad a la que se refiere la ley de Ampere.

** 8.3 **

Junio 1989 - 1ª tanda - optativa - 1ª opción - problema 2.

Dos hilos conductores, rectos e indefinidos, se cruzan perpendicularmente, encontrandose muy próximos entre sí. Si por uno de ellos circula una corriente de 10 A, y por el otro una de 5 A, determinar el campo magnético en un punto P, de la bisectriz del ángulo que determinan ambos hilos.

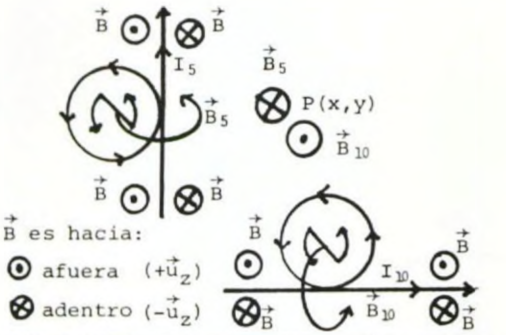




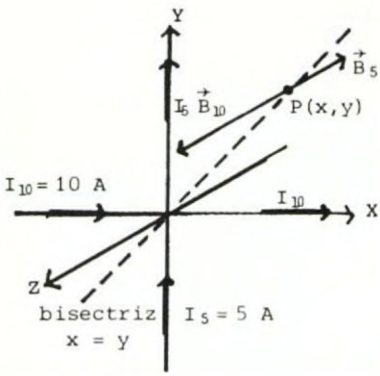
Recordando que las lineas de fuerza del campo magnético originado por una corriente de intensidad I, al circular por un conductor rectilíneo e indefinido, son circunferencias concéntricas con él, podemos aplicar la ley de Ampere para obtener la expresión del valor de $\vec{B}$, en un punto situado a una distancia d del conductor. Para ello tomaremos como curva C para calcular la circulación, la linea de fuerza que pase por dicho punto, es decir, un círculo de radio d concéntrico con el conductor. La intensidad I_a que atraviesa el círculo limitado por C, es la del conductor I, y por razones de simetría, el valor de $\vec{B}$ es constante en los puntos de C, verificándose;

$$\int_C \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \int_C B\cdot d\ell = B\cdot\int_C d\ell = B\cdot 2\cdot\pi\cdot d = \mu_0\cdot I_a = \mu_0\cdot I \;;\; B = 2\cdot\frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I}{d}$$

Como las lineas de fuerza de $\vec{B}$ son circunferencias concéntricas con el conductor, el campo magnético producido por cada conductor en el punto P, será perpendicular al plano del papel, es decir, tendrá la dirección del eje Z según el sistema de referencia de las figuras (ver las figuras de la pagina siguiente). El sentido de $\vec{B}$ puede obtenerse mediante la "regla B" de 8.0, según se indica en la figura de la izquierda (página siguiente).



SENTIDOS de los campos magnéticos en P.



El vector $\vec{B}$ originado en el punto P por la corriente de 10 A, $\vec{B}_{10}$, es hacia afuera del papel, $\vec{B}_{10} = B_{10}\cdot\vec{u}_z$ y su valor es;

$$B_{10} = 2\cdot\frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I}{d} = 2\cdot 10^{-7}\cdot\frac{10}{y} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{y} \quad ;y \quad \vec{B}_{10} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{y}\cdot\vec{u}_z$$

El vector $\vec{B}$ originado en P por la corriente de 5 A, $\vec{B}_5$, es hacia adentro del papel, $\vec{B} = -B_5\cdot\vec{u}_z$ y su valor es;

$$B_5 = 2\cdot\frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I}{d} = 2\cdot 10^{-7}\cdot\frac{5}{x} = \frac{10^{-6}}{x} \quad ;\ y \quad \vec{B}_5 = -\frac{10^{-6}}{x}\,\vec{u}_z$$

Como el punto P(x,y) está en la bisectriz, y = x, el campo magnético originado por ambas corrientes en este punto es;

$$\underline{\vec{B}} = \vec{B}_{10} + \vec{B}_5 = \frac{2\cdot 10^{-6}}{x}\cdot\vec{u}_z + \left(-\frac{10^{-6}}{x}\cdot\vec{u}_z\right) = \underline{\frac{10^{-6}}{x}\cdot\vec{u}_z = \frac{10^{-6}}{y}\cdot\vec{u}_z}$$

donde el vector $\vec{B}$ tiene la dirección-sentido del semieje Z positivo, es decir, es perpendicular al plano del dibujo y hacia afuera.

9. FUERZAS MAGNÉTICAS

** 9.1 **

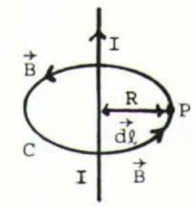
1985 - 2ª opción

Por un conductor rectilíneo e indefinido circula una corriente de 20 A. Un electrón está a 1 cm del centro del conductor y se mueve con una velocidad de $5 \cdot 10^6$ m/s. Hallar la fuerza debida al campo magnético que actúa sobre el electrón, cuando éste se mueve:

a) alejándose del conductor en dirección perpendicular

b) paralelo al conductor en el sentido de la corriente

c) perpendicular al conductor y tangente a una circunferencia concéntrica con él.



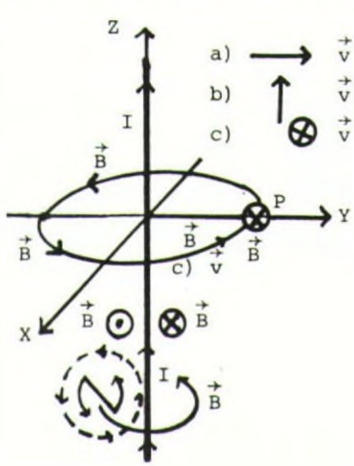
Para obtener el vector inducción magnética, $\vec{B}$, originado por la corriente eléctrica de intensidad I que circula por un conductor rectilíneo e indefinido, calcularemos su circulación a lo largo de la linea de fuerza C que pasa por P, una circunferencia de radio R, a lo largo de la cual $\vec{B}$ permanece constante por razones de simetría;

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \oint_C B\cdot d\ell = B\cdot\oint_C d\ell = B\cdot 2\cdot\pi\cdot R$$

y aplicando la ley de Ampere;

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \mu_0\cdot I_a \quad ; \; B\cdot 2\cdot\pi\cdot R = \mu_0\cdot I \quad ; \quad B = 2\cdot\frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I}{R}$$

El sentido de $\vec{B}$ viene dado por la regla B de 8.0, tal como se sugiere en la figura.



Para aplicar la expresión de la fuerza de Lorentz, $\vec{F} = q\cdot\vec{v}\times\vec{B}$, tomemos el sistema de referencia de la figura, por lo que en el punto P, donde en un momento dado está el electrón de carga q ($q = -e$, $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C), $\vec{B} = -B\cdot\vec{u}_x$

a) Si el electrón se aleja del conductor en dirección perpendicular, $\vec{v} = v\cdot\vec{u}_y$ y $\vec{F} = q\cdot\vec{v}\times\vec{B} =$ $= -e\cdot v\cdot\vec{u}_y \times (-B\cdot\vec{u}_x) = -e\cdot v\cdot B\cdot\vec{u}_z$

$F = e\cdot v\cdot B = 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{6}\cdot 4\cdot 10^{-4} = 3,2\cdot 10^{-16}$ N ; $\vec{F} = -3,2\cdot 10^{-16}\cdot\vec{u}_z$ N

Respuesta: La fuerza vale $3,2\cdot 10^{-16}$ N , es paralela al conductor y en sentido contrario al de la corriente.

b) Si el electrón se mueve paralelamente al conductor y en el sentido de la corriente, $\vec{v} = v\cdot\vec{u}_z$ y

$$\vec{F} = q\cdot\vec{v}\times\vec{B} = -e\cdot v\cdot\vec{u}_z \times (-B\cdot\vec{u}_x) = e\cdot v\cdot B\ (\vec{u}_z\times\vec{u}_x) = e\cdot v\cdot B\cdot\vec{u}_y$$

$F = 3,2\cdot 10^{-16}$ N, como en el aparatado a), $\vec{F} = 3,2\cdot 10^{-16}\cdot\vec{u}_y$ N.

Respuesta: La fuerza vale $3,2\cdot 10^{-16}$ N , es perpendicular al conductor y alejandose de él.

c) Si el electrón se mueve perpendicularmente al conductor y tangente a una circunferencia concéntrica, sigue una línea de fuerza, $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{B}$, y $\vec{F} = q\cdot\vec{v}\times\vec{B} = 0$. Esto puede comprobarse para el caso particular considerado en la figura, siendo la velocidad del electrón en el punto P; $\vec{v} = -\ v\cdot\vec{u}_x$ y

$$\vec{F} = q\cdot\vec{v}\times\vec{B} = -e\cdot(-v\cdot\vec{u}_x)\times(-b\cdot\vec{u}_x) = -e\cdot v\cdot B\ (\vec{u}_x\times\vec{u}_x) = 0.$$

Respuesta: Sobre el electrón no actúa fuerza magnética al moverse paralelamente al vector $\vec{B}$.

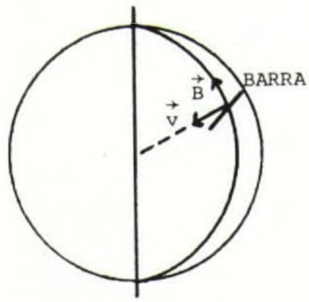
Obsérvese que la forma de dar la respuesta es independiente del sistema de referencia elegido y del punto P considerado.

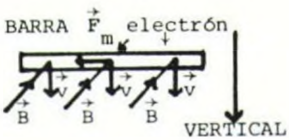
** 9.2 **

Septiembre 1984 - 2ª opción

Una barra metálica, de 1 m de longitud, cae, a partir del reposo, manteniéndose siempre horizontal y orientada de Este a Oeste. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre sus extremos después de que haya caído 10m?. La componente horizontal del campo magnético terrestre es de $0,17.10^{-4}$ Tesla.

La Tierra se comporta como un imán, aunque sus polos estan situados a unos 20º de los correspondientes al eje de rotación. Sin embargo, podemos considerar que ,aproximadamente, la componente horizontal del campo magnético terrestre, $\vec{B}_h$, es perpendicular a la varilla en cualquier posición de su caída.





La velocidad de caída libre, $\vec{v}$, es normal a la superficie de la Tierra y por tanto a $\vec{B}_h$.

Consideremos uno de los electrones libres de la barra, cuya velocidad será la de la barra, ya que el movimiento de agitación térmica de los electrones no influye en el problema al ser al azar. La fuerza magnética, $\vec{F}_m$, que actúa sobre el electrón es, $\vec{F}_m = q.\vec{v} \times \vec{B}_h$, paralela a la barra ($\vec{v}$ y $\vec{B}_h$ son perpendiculares entre sí y a la barra) y su valor es;

$$F_m = |q| \cdot v \cdot B_h = e \cdot v \cdot B_h \qquad (q = -e)$$

Esta fuerza magnética va aumentando mientras la barra cae, ya que la velocidad de la barra y el valor medio de la velocidad de los electrones en la dirección vertical aumentan. Si la barra cae 10 m partiendo del reposo y se desprecian los rozamientos, el incremento de su energía cinética es igual a la disminución de su energía potencial gravitatoria;

$\Delta E_c = - \Delta E_p = m \cdot g \cdot h$, donde h es la altura descendida, h=10 m

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{10}^2 = m \cdot g \cdot h \quad ; \quad v_{10} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10} = 14 \text{ m/s}$$

por lo que en esa situación $F_m = e \cdot v_{10} \cdot B_h$.

La anterior fuerza magnética desplazará los electrones hacia un extremo de la barra de longitud ℓ, produciendo una diferencia de potencial ΔV, y un campo eléctrico $\vec{E}$, por lo que se ejercerá sobre cada electrón una fuerza electrostática de valor $F_e = e \cdot E = e \cdot (\Delta V/\ell) = e \cdot \Delta V/\ell$, que se opone a que continuen acumulándose los electrones en un extremo de la barra. En el equilibrio estas dos fuerzas se contrarrestan al ser opuestas y de igual valor ; $F_m = F_e$

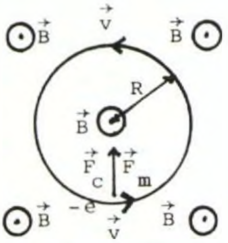
$$e \cdot v_{10} \cdot B_h = e \cdot \frac{\Delta V}{\ell} \quad ; \quad \Delta V = \ell \cdot v_{10} \cdot B_h = 1 \cdot 14 \cdot 0{,}17 \cdot 10^{-4}$$

$\underline{\Delta V = 0{,}238 \cdot 10^{-3}\ V}$, es decir, 0,238 mV ó 238 μV

** 9.3 **

Septiembre 1983 - 2ª opción

¿Cuánto valdrá el radio de la órbita circular de un electrón de 10^3 eV de energía, al desplazarse en un plano perpendicular a un campo magnético de 1 T.?



⊙ normal al plano y hacia afuera.

La inducción magnética o vector $\vec{B}$, es perpendicular a la velocidad del electrón, por lo que según la expresión de Lorentz, $\vec{F}_m = q\cdot\vec{v}\times\vec{B}$; $F_m = e\cdot v\cdot B$ y F_m es normal a la velocidad del electrón, produciéndole la fuerza centrípeta $\vec{F}_c$, $\vec{F}_c = \vec{F}_m$, que curva su trayectoria convirtiéndola en una circunferencia de radio R. Como $F_c = m\cdot v^2/R$, de $F_c = F_m$ resulta; $\frac{m\cdot v^2}{R} = e\cdot v\cdot B$; $R = \frac{m\cdot v^2}{e\cdot v\cdot B} = \frac{m}{e}\cdot\frac{v}{B}$

La energía de 1 eV corresponde a la energía electrostática de un electrón sometido a la diferencia de potencial de 1 voltio (energía = $q\cdot\Delta V$) ; 1 eV = e·1 = e, en julios si q está en culombios. Es decir, la energía cinética del electrón, $E_c = 10^3$ eV= $10^3\cdot e$ J, lo que nos permite calcular su velocidad;

$$E_c = \frac{1}{2}\, m_e\cdot v^2 = 10^3\cdot e \quad ; \quad v = \sqrt{\frac{2\cdot 10^3\cdot e}{m_e}}$$

y

$$R = \frac{m_e}{e}\sqrt{\frac{e}{m_e}}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot 10^3}}{B} = \sqrt{\frac{m_e}{e}}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot 10^3}}{1} = 44{,}72\sqrt{\frac{m_e}{e}}$$

expresándose R en metros si m_e está en kilogramos y e en culombios.

Si tomamos para $e/m_e = 1{,}759\cdot 10^{11}$ C/Kg ,

$R = 1{,}066\cdot 10^{-4}$ m ó R= 0,1066 mm.

** 9.4 **

1985 - 2ª opción

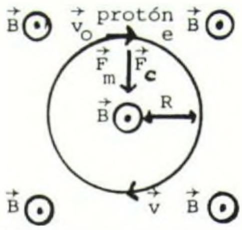
Un protón penetra con velocidad v_o en una región donde existe un campo $\vec{B}$ ($\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{v}_o$), determinar:

a) El radio, R, de la trayectoria seguida por la partícula.

b) El período del movimiento.

c) La variación de la energía cinética del protón cuando es acelerado por una diferencia de potencial V.

Llamaremos m_p a la masa del protón y e a su carga, ya que es positiva e igual a la carga elemental.



⊙ normal al plano y hacia afuera.

Al igual que en el problema anterior, al ser $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{v}_o$, $\vec{F}_{mo} = e \cdot \vec{v}_o \times \vec{B}$, y al ser $\vec{F}_{mo}$ perpendicular a la velocidad del protón, esta cambia de dirección pero no de valor, verificandose; $v = v_o$. Mientras el protón esté sometido al campo magnético, $\vec{F}_m = e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$, siendo $F_m = e \cdot v_o \cdot B = F_{mo}$ y $\vec{F}_m$ es perpendicular en cada punto a $\vec{v}$, por lo que constituye una fuerza centrípeta que curva su trayectoria hasta forzarlo a describir una circunferencia o un arco de circunferencia si escapa antes a la acción del campo. El radio de esta circunferencia es;

a) $F_c = F_m$; $\dfrac{m_p \cdot v_o^2}{R} = e \cdot v_o \cdot B$; $\underline{R = \dfrac{m_p \cdot v_o}{e.B}}$

b) Durante un periodo T, el protón describe una circunferencia, es decir, una distancia $s = 2 \cdot \pi \cdot R$,por lo que;

$$v_o = \frac{s}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} \ ; \quad T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v_o} = \frac{2 \cdot \pi}{v_o} \cdot \frac{m_p \cdot v_o}{e \cdot B} = \underline{\frac{2 \cdot \pi \cdot m_p}{e \cdot v_o}}$$

c) Para acelerar el protón es necesario aplicarle un campo eléctrico, es decir, una diferencia de potencial ΔV (V en el enunciado) que le comunicará un incremento de energía cinética;

$$\underline{E_c = e \cdot V}$$

Comparando la figura de este problema con la del anterior, se observa que aunque el sentido de $\vec{B}$ es el mismo, el protón gira en sentido opuesto al del electrón al ser sus cargas de signos contrarios.

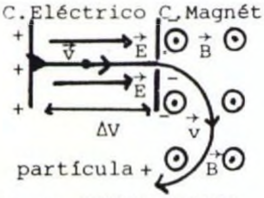
** 9.5 **

Junio 1987 - 2a tanda - 1a opción.

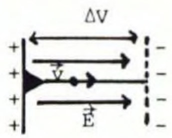
Partículas ($m = 6.68 \times 10^{-27}$ Kg , $q = + 2e$) se aceleran desde el reposo a través de una caída de potencial de 1KV. Después entran un campo magnético $B = 0.2T$, perpendicular a la dirección de su movimiento. Calcúlese el radio de su trayectoria.

Este problema y el siguiente son similares a los dos anteriores, aunque en lugar de dar la velocidad de las partículas, proporcionan la diferencia de potencial a la que se aceleran. La primera parte de estos problemas será calcular estas velocidades, continuando luego como en los dos problemas anteriores.

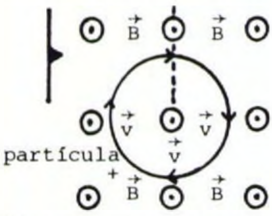
C.Eléctrico C.Magnético



Campos YUXTAPUESTOS



1ª fase, C.ELECTRICO



2ª fase, C.MAGNETICO

Campos SUCESIVOS

Si se considera que los campos eléctrico y magnético, actúan sobre zonas yuxtapuestas, como en la figura superior, la partícula describirá media circunferencia y saldrá del campo magnético. Para que la partícula describa una circunferencia completa, o sucesivamente la misma circunferencia, ambos campos actuarán sobre una zona comun. Podemos considerar que actuan sucesivamente, primero el eléctrico y luego el magnético sobre la misma zona, al menos parcialmente, como en las dos figuras inferiores.

Al ser las partículas positivas se aceleran hacia potenciales decrecientes, $\Delta V=-10^3$ V y al partir del reposo, $E_c = \Delta E_c$;

$$E_c = \Delta E_c = -\Delta U_{electrostática} = -q\cdot\Delta V =$$
$$-(+2e)\cdot(-1000) = 2000\cdot e = 3{,}2\cdot10^{-16}\ \text{J},$$

tomando para e el valor; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C.

$$\text{Como } E_c = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \ ;\ v = \sqrt{\frac{2\cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot3{,}2\cdot10^{-16}}{6{,}68\ 10^{-27}}} = 309{,}5\cdot10^3$$

Las fuerzas magnéticas sobre las partículas son; $\vec{F}_m = q\cdot\vec{v}\times\vec{B} = 2\cdot e\cdot\vec{v}\times\vec{B}$, y al ser $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{B}$, las fuerzas magnéticas son de valor, $Fm = 2e\cdot v\cdot B$ y normales a las trayectorias de las partículas, curvándolas hasta convertirlas en circunferencias o en arcos de éstas, si escapan antes a la acción del campo magnético. Para que la trayectoria sea circular de radio R;

$$F_c = \frac{m\cdot v^2}{R} \ ;\ F_c = F_m \ ;\ \frac{m\cdot v^2}{R} = 2\cdot e\cdot v\cdot B \ ;\ R = \frac{m\cdot v}{2\cdot e\cdot B} =$$

$$= \frac{6{,}68\cdot10^{-27}\cdot309{,}5\cdot10^3}{2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot0{,}2} = 0{,}032\ \text{m} = 32\ \text{mm}$$

El radio de la órbita es igual a 0,032 m = 32 mm

** 9.6 **

Junio 1988 - 1ª tanda - 2ª opción

Septiembre 1989 - optativa - 2ª opción - problema 2

Un protón se acelera desde el reposo, mediante una diferencia de potencial de 6000 V. Posteriormente se introduce en una región donde existe un campo magnético uniforme de dirección perpendicular a su velocidad. a)Calcular el radio de la órbita que describe el protón, si el campo magnético es de 4.10^{-3} T. b) Determinar la frecuencia de oscilación del protón. ($q_p = 1.6 \times 10^{-19}$ C ; $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ Kg)

a) Al acelerarse el protón partiendo del reposo, adquiere una energía cinética, $E_c = \Delta E_c$, mientras su energía electrostática disminuye, desplazándose el electrón hacia potenciales decrecientes, $\Delta V = -6000$ V . De la conservación de la energía;

$$\Delta U_e + \Delta E_c = 0 \quad ; \quad q_p \cdot \Delta V + \frac{1}{2} \cdot m_p \cdot v^2 = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{-2 \cdot q_p \cdot \Delta V}{m_p}} = \sqrt{\frac{-2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (-6000)}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 1,072 \cdot 10^6 \quad m/s$$

Posteriormente el protón se introduce en una región donde hay un campo magnético, como se discutió al comienzo del problema anterior y se muestra en sus figuras. La fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento, fuerza de Lorentz, es perpendicular a su velocidad en cada punto, a su trayectoria, curvándola de modo que esta sea circular a no ser que la partícula la escape antes a la acción del campo magnético. Es decir, la fuerza magnética constituye la fuerza centrípeta necesaria para que el movimiento sea circular;

$$F_c = F_m \quad ; \quad F_m = |q_p \cdot v \times B| = q_p \cdot v \cdot B \quad ; \quad F_c = \frac{m_p \cdot v^2}{R}$$

$$q_p \cdot v \cdot B = \frac{m_p \cdot v^2}{R} \quad ; \quad \underline{R = \frac{m_p \cdot v}{q_p \cdot B}} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 1,072 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = \underline{2,798 \quad m.}$$

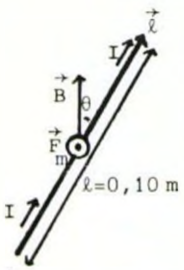
b) Más que oscilar, el protón gira describiendo circunferencias de radio constante, por lo que la frecuencia de giro o número de vueltas o ciclos que da por unidad de tiempo es igual al espacio recorrido en la unidad de tiempo, la velocidad v, dividido por la longitud de la circunferencia , $2\cdot\pi\cdot R$. En el S.I., la frecuencia se mide en hertz, Hz, o ciclo por segundo (ciclo/segundo);

$$f = \frac{v}{2\cdot\pi\cdot R} = \frac{1,072\cdot 10^6}{2\cdot\pi\cdot 2,798} = 60977 \text{ Hz}$$

** 9.7 **

1985 - 1ª opción

Un alambre forma un ángulo de 30° con un campo magnético uniforme de 0,02 T .La longitud del alambre es de 10 cm y por él pasa una corriente de 5 A. ¿Cuál es el valor de la fuerza resultante sobre el alambre?¿En que posición debe colocarse el alambre para que dicha fuerza sea mínima?¿Y nula?



$\odot\ \vec{F}_m$ es normal al papel y hacia afuera.

La fuerza que un campo magnético uniforme definido por $\vec{B}$, ejerce sobre un alambre rectilíneo, como consideraremos el del enunciado, viene dado por $\vec{F}_m = I\cdot\vec{\ell}\times\vec{B}^{(*)}$,y si θ es el angulo formado por $\vec{B}$ y el alambre, el valor de $\vec{F}_m$ es;

$$F_m = I\cdot\ell\cdot B\cdot \text{sen}\theta \;^{(**)}= 5\cdot 0,10\cdot 0,02\cdot \text{sen}30^o =$$

$$F_m = 5\cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Para que $\vec{F}_m$ se anule en (*) sin anularse ni I, ni ℓ, ni B, $\vec{\ell}\times\vec{B}$ ha de anularse por lo que $\vec{\ell}$ y $\vec{B}$ han de ser paralelos. A este mismo resultado se llega partiendo de la expresión (**) del módulo de F_m, pues para que se anule, $\text{sen}\theta = 0$, y por tanto, $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$, es decir, el conductor y el campo magnético son paralelos.

Como el valor nulo es el menor que puede alcanzar, también la fuerza es mínima cuando el alambre es paralelo al campo.

Respuesta: Cuando el alambre y el campo magnético son paralelos, la fuerza se anula, alcanzando su valor mínimo.

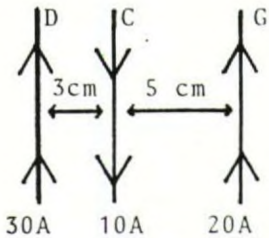
Advirtamos que el valor de una magnitud vectorial, es su módulo, que al ser positivo, su menor valor es el cero.

Por el contrario, muchas magnitudes escalares, como la energía total y las potenciales, pueden tener valores negativos, alcanzando valores inferiores al cero.

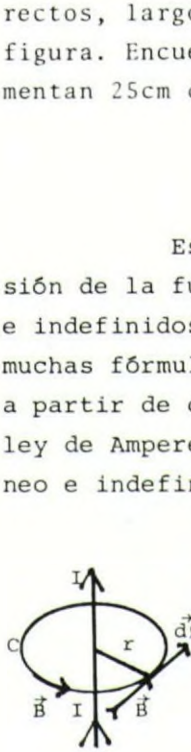
** 9.8 **

Septiembre 1987 - 2ª opción.

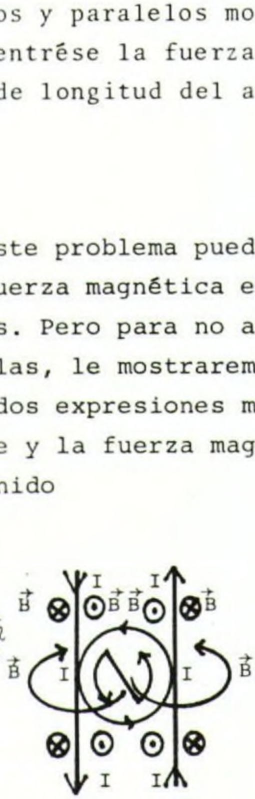
Considérense los tres alambres rectos, largos y paralelos mostrados en la figura. Encuéntrese la fuerza que experimentan 25cm de longitud del alambre C.



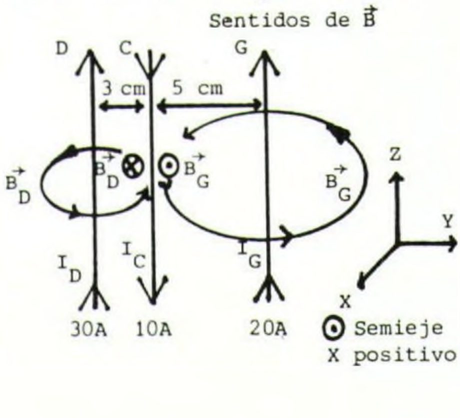
Este problema puede resolverse partiendo de la expresión de la fuerza magnética entre dos conductores rectilíneos e indefinidos. Pero para no acostumbrar al alumno a memorizar muchas fórmulas, le mostraremos que no es dificil resolverlo a partir de dos expresiones muy utilizadas y ya sabidas; la ley de Ampere y la fuerza magnética sobre un conductor rectilíneo e indefinido



Ley de Ampere



Sentidos de $\vec{B}$



El vector $\vec{B}$ originado al circular una intensidad I por un conductor como el D y el G, en un punto que dista r de él, se obtiene aplicando la ley de Ampere, calculando la circulación de $\vec{B}$ a lo largo de la línea de fuerza, circulo C, que pasa por dicho punto;

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B\oint_C d\ell = B\cdot 2\cdot\pi\cdot R = \mu_0\cdot I$$

$$B = \frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot\pi\cdot r} = 2\cdot\frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I}{r}$$

Los sentidos de $\vec{B}$ son los indicados en la figura, de acuerdo con la regla sugerida en la figura de la derecha.

De acuerdo con el sistema de referencia de la figura, los campos magnéticos originados por los conductores D y G en cada punto del conductor C, valen;

$$\vec{B}_D = -B_D \cdot \vec{u}_x = -2 \cdot \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I_D}{\overline{DC}} \cdot \vec{u}_x = -2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{30}{0,03} \cdot \vec{u}_x = -2 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_G = +B_G \cdot \vec{u}_x = +2 \cdot \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I_G}{\overline{CG}} \vec{u}_x = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{20}{0,05} \cdot \vec{u}_x = 8 \cdot 10^{-5} \cdot \vec{u}_x$$

El campo magnético $\vec{B}$ debido a ambos conductores, vale;

$$\vec{B} = \vec{B}_D + \vec{B}_G = -2 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{u}_x + 8 \cdot 10^{-5} \cdot \vec{u}_x = -1,2 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{u}_x \quad \text{T.}$$

La fuerza magnética que experimenta una longitud ℓ=0,25 m, de un conductor rectilíneo por el que circula una intensidad I_C ($\vec{\ell} = -\ell \cdot \vec{u}_z$, ya que tiene el sentido de I_C) bajo la acción del campo magnetico constante $\vec{B}$, es;

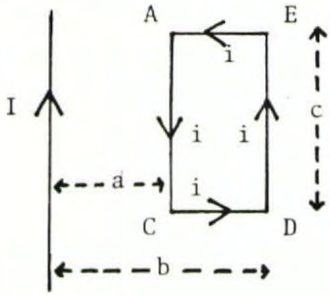
$$\vec{F}_m = I_C \cdot \vec{\ell} \times \vec{B} = 10 \cdot (-0,25 \cdot \vec{u}_x) \times (-1,2 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{u}_x) =$$
$$= 10 \cdot 0,25 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot (-\vec{u}_z) \times (-\vec{u}_x) = 3 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{u}_y \quad \text{N}$$

La fuerza es de $3 \cdot 10^{-4}$ N en la dirección y sentido de C a G .

** 9.9 **

Junio 1986 - 1ª tanda - 1ª opción.

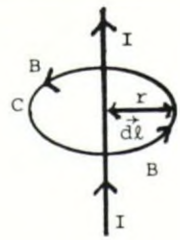
En la figura se muestra un alambre indefinido por el que circula una corriente I, así como una espira rectangular atravesada por una intensidad i. Los lados mayores de la espira son paralelos al conductor indefinido. Calcular:



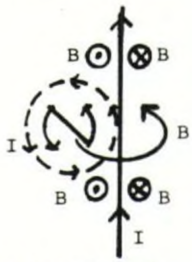
a) La fuerza debida al campo magnético creado por el conductor indefinido, que actúa sobre el segmento AC.

b) La fuerza debida al campo magnético creado por el conductor indefinido, que actúa sobre el segmento AE.

Una vez más, obtendremos el campo magnético $\vec{B}$ originado al recorrer una corriente de intensidad I, un conductor rectilíneo e indefinido, en un punto que dista r de él. Para ello, calcularemos la circulación de $\vec{B}$ según una linea de fuerza que pase por r, circunferencia C, y aplicaremos la ley de Ampere;



Ley de AMPERE



Regla para el SENTIDO de $\vec{B}$

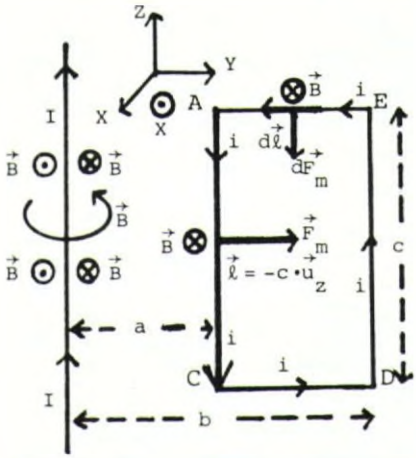
$$\int \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \mu_0 \cdot I_a$$

$$\int \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \int B\cdot d\ell = B\cdot\int d\ell = B\cdot 2\cdot\pi\cdot r$$

$$B\cdot 2\cdot\pi\cdot r = \mu_0\cdot I \quad ; \quad B = \frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot\pi\cdot r} \quad (*)$$

El sentido de $\vec{B}$ lo obtenemos mediante la regla B de 8.0, según la figura. Obteniéndose que en todos los puntos de la espira rectangular $\quad \vec{B} = -\,B\cdot\vec{u}_x \qquad (**)$

La fuerza sobre un elemento de corriente $d\ell$ por el que circula una corriente de intensidad i es $\quad \vec{dF}_m = i\cdot\vec{d\ell}\times\vec{B} \qquad (***)$



⊙ NORMAL al papel y hacia AFUERA
⊗ NORMAL al papel y hacia ADENTRO

a) Para el conductor AC; $r = a$ y según (*) y(**) $\vec{B} = -\,\frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot\pi\cdot a}\cdot\vec{u}_x$, por lo que integrando (***) a todo el conductor AC, y como $\vec{B}$ es constante a lo largo de él, se tiene;

$$\vec{F}_m = i\cdot\vec{\ell}\times\vec{B} = i\cdot(-c\cdot\vec{u}_z)\times\left(-\frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot\pi\cdot a}\cdot\vec{u}_x\right) = \frac{\mu_0}{2\cdot\pi}\cdot i\cdot I\cdot\frac{c}{a}\cdot(-\vec{u}_z)\times(-\vec{u}_x)$$
$$= \frac{\mu_0}{2\cdot\pi}\cdot i\cdot I\cdot\frac{c}{a}\;\vec{u}_y$$

<u>Respuesta</u>: Sobre el conductor AC actúa una fuerza magnética de valor $\frac{\mu_0}{2\cdot\pi}\cdot i\cdot I\cdot\frac{c}{a}$, y dirigida desde A hacia E (o desde C a D)

b) El valor de $\vec{B}$ varía a lo largo del conductor AE debido a que la distancia de sus puntos al alambre varía entre a y b, por lo que considerando un elemento diferencial de él, $\vec{d\ell} = -d\ell\cdot\vec{u}_y$,tomado en el sentido de la corriente que lo recorre, el campo $\vec{B}$, viene dado por (*) y (**), $\vec{B} = -\,\frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot\pi\cdot r}\cdot\vec{u}_x$, por lo que la fuerza elemental $\vec{dF}_m$ que según (***) actúa, es;

$$d\vec{F}_m = i\cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} = i\cdot(-\ d\ell\cdot\vec{u}_y) \times (-\ \frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot\pi\cdot r}\cdot\vec{u}_x) =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\cdot\pi}\cdot i\cdot I\cdot\frac{d\ell}{r}\cdot(-\vec{u}_y) \times (-\vec{u}_x) = -\ \frac{\mu_0}{2\cdot\pi}\cdot i\cdot I\cdot\frac{d\ell}{r}\ \vec{u}_z$$

Para obtener la fuerza magnética $\vec{F}_m$, que actúa sobre todo el segmento AE, integraremos entre $r = a$ y $r = b$. Como dr es una variación diferencial de la distancia del alambre a un punto del segmento AE, $d\ell = dr$; es cuestión de notación.

$$\vec{F}_m = \oint_a^b d\vec{F}_m = -\ \frac{\mu_0}{2\cdot\pi}\cdot i\cdot I\cdot\vec{u}_z\cdot\oint_a^b\frac{dr}{r} = -\ \frac{\mu_0}{2\cdot\pi}\cdot i\cdot I\cdot\vec{u}_z\cdot\left[\ln\ r\right]_a^b =$$

$$= -\ \frac{\mu_0}{2\cdot\pi}\cdot i\cdot I\cdot(\ln\ b\ -\ \ln\ a)\cdot\vec{u}_z = -\ \frac{\mu_0}{2\cdot\pi}\cdot i\cdot I\cdot(\ln\ \frac{a}{b})\cdot\vec{u}_z$$

siendo $(\ln\ b\ -\ \ln\ a)$ y $\ln\ \frac{a}{b}$ positivos al ser $b > a$.

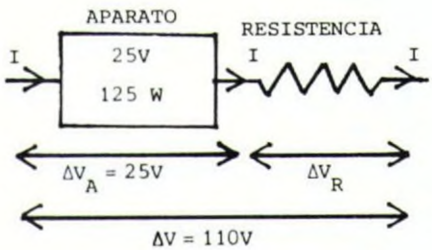
Respuesta: Sobre el segmento AE actúa una fuerza magnética de valor $\frac{\mu_0}{2\cdot\pi}\cdot i\cdot I\cdot\ln\ \frac{a}{b}$, y dirigida desde A hacia C o desde E a D.

10. INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA CORRIENTE ALTERNA

** 10.1 **

Septiembre 1982 - 2ª opción.

Calcular la resistencia que hay que montarle en serie a un aparato eléctrico de 25V, 125W para que funcione normalmente al conectarlo a una red de 110V ¿Qué tanto por ciento de la energía tomada de la red se aprovecha en este caso?.



Para que el aparato funcione correctamente ha de circular por él una intensidad;

$$I = \frac{P_A}{V_A} = \frac{125}{25} = 5 \text{ A}$$

que es la misma que circulará por la resistencia al estar ambos conectados en serie. Por este motivo, la suma de la caída de tensión o diferencia de potencial, en cada elemento, es igual a la diferencia de potencial aplicada al conjunto, es decir, la de la red;

$$\Delta V = \Delta V_A + \Delta V_R \quad ; \quad 110 = 25 + \Delta V_R \quad ; \quad \Delta V_R = 110 - 25 = 85 \text{ V}$$

Aplicando ahora la ley de Ohm a la resistencia;

$$I = \frac{\Delta V_R}{R} \quad ; \quad R = \frac{\Delta V_R}{I} = \frac{85}{5} = 17 \quad \Omega \text{ (ohmio)}$$

Como la potencia tomada de la red es;

$$P_{red} = I \cdot \Delta V = 5 \cdot 110 = 550 \text{ W}$$

$$\frac{P_{aparato}}{P_{red}} = \frac{125}{550} = 0{,}227 \quad \text{y el porcentaje es; } 100 \cdot 0{,}227 = 22{,}7\%$$

Se aprovecha el 22,7% de la potencia de la red.

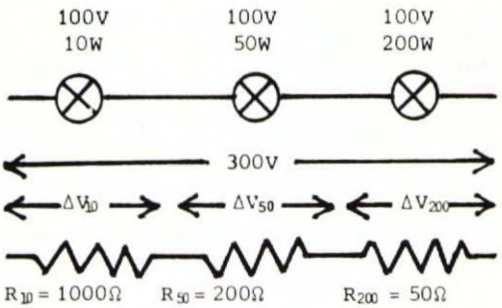
De este resultado se deduce que, en general, este método no es adecuado, siendo preferible utilizar un transformador si la corriente fuese alterna.

** 10.2 **

Junio 1984 - 1ª tanda - 2ª opción

Se dispone de tres bombillas de 100 V, y de 10, 50 y 200 W, respectivamente. ¿Qué es lo que ocurre si montadas en serie se conectan a una red de 300 V?

Aunque el valor de la resistencia de un conductor no varía apreciablemente con los cambios de la temperatura ambiental, sí resulta apreciable el aumento de la resistencia del filamento de una bombilla al encenderse, pues su temperatura se eleva a unos 3000° C. Por esto, si a una bombilla se le aplica una tensión muy diferente de la indicada sobre ella, su resistencia no es la que se deduce de sus características de funcionamiento óptimo o idoneo (voltaje y potencia o voltaje e intensidad). Sin embargo, para resolver este problema, supondremos que las resistencias de las bombillas son constantes.



Calculemos la resistencia de las bombillas, a partir de la ley de Ohm y de la expresión de la potencia eléctrica; $I = \Delta V/R$

$$P = I \cdot \Delta V = \frac{\Delta V}{R} \cdot \Delta V = \frac{\Delta V^2}{R}$$

$$R = \frac{\Delta V^2}{P}$$

$$R_{10} = \frac{100}{10} = 1000\Omega \; ; \; R_{50} = \frac{100}{50} = 200\Omega \; ; \; R_{200} = \frac{100}{200} = 50\Omega$$

La resistencia del sistema es;

$$R_s = R_{10} + R_{50} + R_{200} = 1000 + 200 + 50 = 1250\Omega$$

y al conectarla a 300V, la intensidad que las recorre es, según la ley de Ohm;

$$I_s = \frac{\Delta V_s}{R_s} = \frac{300}{1250} = 0{,}24 \text{ A}$$

Como $\Delta V = I \cdot R$ y $P = I \cdot \Delta V$, la diferencia de potencial entre los extremos de estas bombillas y la potencia disipada en ellas, será para la de;

10W : $\Delta V_{10} = I_s \cdot R_{10} = 0{,}24 \cdot 1000 = \underline{240V}$: $P_{10} = I_s \cdot \Delta V_{10} = 0{,}24 \cdot 240 = \underline{57{,}6W}$

50W : $\Delta V_{50} = I_s \cdot R_{50} = 0{,}24 \cdot 200 = \underline{48V}$: $P_{50} = I_s \cdot \Delta V_{50} = 0{,}24 \cdot 48 = \underline{11{,}52W}$

200W : $\Delta V_{200} = I_s \cdot R_{200} = 0{,}24 \cdot 50 = \underline{12V}$: $P_{200} = I_s \cdot \Delta V_{200} = 0{,}24 \cdot 12 = \underline{2{,}88\ W}$

Respuesta: La bombilla de menor potencia nominal, 10W, lucirá mucho más que en su funcionamiento correcto, ya que la potencia disipada en ella supera en cinco veces la nominal, al ser mucho mayor la tensión aplicada. Por ésto, la bombilla de 10W nominales, se funde rápidamente interrumpiéndose la corriente eléctrica y apagándose las otras dos bombillas. Durante este breve lapso de tiempo, la bombilla de 50W lucirá tenuamente y la de 200W no lucirá prácticamente aunque circule por ella la corriente, ya que la potencia disipada es del orden del 1% de la nominal.

** 10.3 **

Junio 1989 - 2ª tanda - optativa - 2ª opción - problema 2

Cuando la corriente que circula por una bobina determinada es de 5 A, y está aumentando a razón de 10 A/s, la diferencia de potencial en los extremos de la misma es de 140 V. Cuando la corriente vale 5 A y está disminuyendo a razón de 10 A/s, la diferencia de potencial es de 60 V. Hallar la resistencia y la autoinducción de la bobina.

La interpretación más sencilla e inmediata del enunciado es considerar una corriente de sentido constante, cuya intensidad aumenta o disminuye uniformemente. Esta variación de la intensidad produce una fuerza electromotriz inducida, ε_i, que se superpone a la diferencia de potencial aplicada, ΔV, por lo que aplicando la ley de Ohm $\Delta V + \varepsilon_i = I \cdot R$ (*)
donde R es la resistencia de la bobina. Si L es el coeficiente de autoinducción de la bobina, la fuerza electromotriz inducida es; $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t}$ y (*) se escribe; $\Delta V - L\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t} = I\cdot R$
indicando los signos menos que ε_i contribuye al paso de la corriente, se añade a ΔV, cuando I disminuye y se opone al paso de la corriente, se resta de ΔV, cuando I aumenta;

I aumenta: $\Delta I/\Delta t = 10$: $140 - L\cdot 10 = 5\cdot R$: $140 - 10\cdot L = 5\cdot R$

I disminuye: $\Delta I/\Delta t = -10$: $60 - L\cdot(-10) = 5\cdot R$: $60 + 10\cdot L = 5\cdot R$

Sumando ambas ecuaciones, se tiene; $200 = 10\cdot R$; $R = 200/100 = 20\Omega$. Restándolas, se obtiene; $80 - 20\cdot L = 0$; $L = 80/20 = 4$ H.

La resistencia, $\underline{R = 20}$, y la autoinducción , $\underline{L = 4\ \text{H}}$.

** 10.4 **

Junio 1984 - 2ª tanda - 2ª opción.

A través de un solenoide de 1000 vueltas, pasa un flujo magnético de 10^{-3}Wb. Si el flujo se reduce en 10^{-3}s a 10^{-4} Wb. ¿Cuál será la fuerza electromotriz que se induce?

Considerando que el flujo varía uniformemente;

$$\underline{\varepsilon} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{10^{-4} - 10^{-3}}{10^{-3}} = \underline{0,9\ V}$$

El signo positivo de ε significa que la f.e.m. inducida tratará de producir una corriente cuyo campo magnético tenga el mismo sentido que el que está disminuyendo.

En el enunciado se dice " a través de un solenoide pasa un flujo..." por lo que se han interpretado los datos dados como correspondientes al flujo a través del solenoide y es irrelevante el dato sobre el número de espiras. Si se considerase que los datos dados se refieren al flujo que atraviesa cada espira del solenoide; $\phi_{solenoide} = 1000 \cdot \phi_{espira}$ y

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{1000 \cdot (10^{-4} - 10^{-3})}{10^{-3}} = 900\ V.$$

Nosotros nos inclinamos por la primera interpretación, aunque no se utilicen todos los datos dados.

** 10.5 **

Septiembre 1986 - 1ª tanda - 1ª opción.

Un solenoide de 200 espiras de 2 cm^2 de sección y de 10 cm de longitud. Calcular:

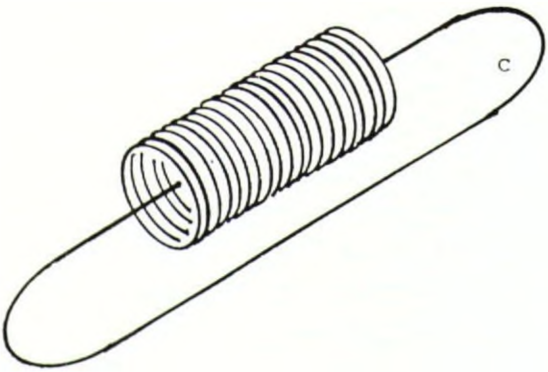
a) El coeficiente de autoinducción.

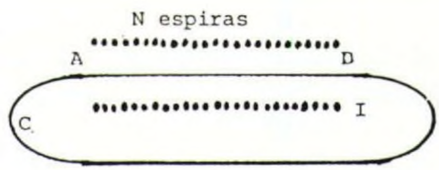
b) La fuerza electromotriz inducida cuando la corriente que lo recorre aumenta de 2 a 5A. en 0,2 s.

c) La Fuerza electromotriz inducida cuando una corriente de 3A. se anula en 0,6 s.

El coeficiente de autoinducción, L, de un solenoide se define como la relación entre el flujo, Φ, que lo atraviesa al circular por él una corriente eléctrica y la intensidad de ésta, I; $L = \Phi / I$. Comenzaremos calculando el flujo que atraviesa el solenoide, para lo que necesitamos conocer el vector inducción magnética, $\vec{B}$, en su interior.

Sea N el número de espiras del solenoide ($N = 200$), S su sección ($S = 2 \cdot 10^{-4}\ m^2$) y ℓ su longitud ($\ell = 0,10$ m); y consideremos que está en el aire ($\mu = \mu_0$). Una aproximación adecuada





Sección del solenoide según un plano que contiene a la linea C.

cuando el solenoide es mucho más largo que ancho, como ocurre en este caso, es considerar que en el interior del solenoide el vector $\vec{B}$ es paralelo a su eje y su valor es constante, y que se anula en su exterior; como supondremos a continuación. Por ello, la circulación de $\vec{B}$ a lo largo de una linea cerrada C, como la de la figura, recorrida en el sentido de $\vec{B}$ es ;

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{recta AD}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{recta AD}} B \cdot d\ell = B \cdot \int_{\text{recta AD}} d\ell = B \cdot \ell$$

Como la intensidad, I_a, que atraviesa la superficie limitada por la linea cerrada C es , $I_a = N\ I$, aplicando la ley de Ampere;

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_a \quad ; \quad B \cdot \ell = \mu_0 \cdot N \cdot I \quad ; \quad B = \mu_0 \cdot N \cdot I / \ell$$

El flujo que atraviesa una espira del solenoide es;

$\Phi_{espira} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\ S$, y el que atraviesa sus N espiras;

$$\Phi = N \cdot \Phi_{espira} = N \cdot B \cdot S = N \cdot \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\ell} \cdot S = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot S}{\ell} \cdot I$$

Ahora ya puede calcularse el coeficiente de autoinducción L;

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S \cdot I / \ell}{I} = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{\ell} = \frac{1{,}257 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0.10} =$$

$$\underline{L = 10^{-4}\ \text{H (henry)}}$$

que permanecerá constante mientras el solenoide no se deforme o se varie la permeabilidad del medio, μ.

b) Suponiendo que la intensidad varia de forma uniforme ($\Delta I / \Delta t$ = constante) o considerando valores medios, la fuerza electromotriz inducida que viene dada por la ley de Faraday-Lenz, se expresa;

$$\underline{\varepsilon} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = - 10^{-4} \cdot \frac{5 - 2}{0{,}2} = \underline{1{,}5 \cdot 10^{-3}\ V} \quad \text{ó} \quad = 1{,}5\ mV$$

El signo menos indica que la fuerza electromotriz inducida produce una corriente eléctrica que se opone a la que circula, es decir, se opone a que el campo magnético aumente.

c) Análogamente;

$$\underline{\varepsilon =} - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -10^{-4} \cdot \frac{0 - 3}{0{,}6} = \underline{5 \cdot 10^{-4}}\ V \quad \text{ó} \quad = 0{,}5\ mV$$

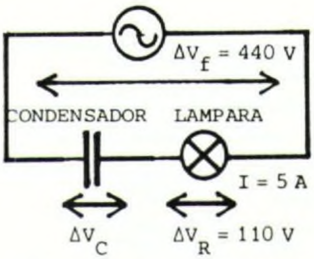
El signo más indica que la fuerza electromotriz inducida produce, o trata de producir, una corriente electrica que se opone a que la corriente electrica se extinga, es decir, se opone a que el campo magnético disminuya.

11. CORRIENTE ALTERNA

** 11.1 **

Junio 1989 - 1ª tanda - obligatoria - 1ª opción - problema 2

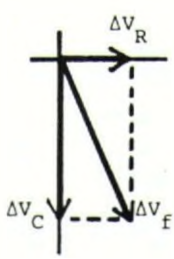
Un condensador y una lámpara eléctrica están unidos en serie con una fuente de corriente alterna de 440 V de tensión y 50 Hz de frecuencia. ¿Qué capacidad debe tener el condensador para que por la lámpara pase una intensidad de 0.5 A y la caída de tensión en la misma sea de 110 V?.



Este problema puede resolverse desde enfoques diferentes aunque similares. Lo más sencillo es partir de uno de los diagramas fasoriales y tener en cuenta que,al estar en serie,la misma intensidad recorre la lámpara y el condensador. Consideraremos que la lámpara se comporta como una resistencia, lo que ocurre si es una lampara de incandescencia o bombilla.

Metodo 1. Tensiones.

La caída de tensión,en los diferentes elementos de un circuito en serie de corriente alterna,puede estar desfasada. Por ello y en general, la tensión suministrada por la fuente no es igual a la suma de los valores de las diferentes caídas de tensión, sino que es igual a su suma fasorial. En el diagrama



fasorial se advierte que la caída de tensión en el condensador va retrasada $\pi/2$ respecto a la caida de tensión en la lámpara. La relación entre los valores de las caídas de tensión es;

$$\Delta V_f^2 = \Delta V_C^2 + \Delta V_R^2$$

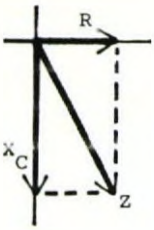
$$\Delta V_C^2 = \Delta V_f^2 - \Delta V_R^2 = 440^2 - 110^2 = 18150 \quad ; \quad \Delta V_C = 426 \text{ V}$$

La caida de tensión en el condensador es

$$\Delta V_C = I \cdot X_C \quad ; \quad X_C = \frac{\Delta V_C}{I} = \frac{426}{0,5} = 852 \ \Omega$$

ya que la misma intensidad circula por el condensador que por la lámpara, al estar en serie.

Para un condensador; $X_C = \dfrac{1}{C \cdot \omega}$, siendo $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, por lo que $C = \dfrac{1}{X_C \cdot \omega} = \dfrac{1}{852 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50} = 3{,}74 \cdot 10^{-6}$F ó $\underline{C = 3{,}74\ \mu F}$



Metodo 2. Impedancia.

Aplicando la ley de Ohm a la lámpara, su resistencia es; $R = \frac{\Delta V_R}{I} = \frac{110}{0,5} = 220\ \Omega$

Para el circuito, conjunto lámpara-condensador, se verifica $\Delta V = I \cdot Z$; $Z = \frac{440}{0,5} = 880\ \Omega$ que es la impedancia del circuito. Como éste sólo tiene una resistencia "pura", la de la lámpara, y una capacida "pura", la del condensador, el diagrama fasorial reactancias-impedancias es el de la figura, verificándose;

$$Z^2 = R^2 + X_C^2 \quad ; \quad X_C^2 = Z^2 - R^2 = 880^2 - 220^2 = 726000$$

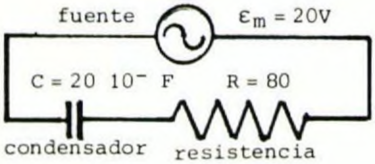
y $X_C = 852\ \Omega$, continuándose como en el método 1.

En este problema no se especifica si los valores dados para las tensiones y la intensidad, son eficaces o máximos. Aunque suele suponerse lo primero, la solución de este problema es la misma en ambos casos.

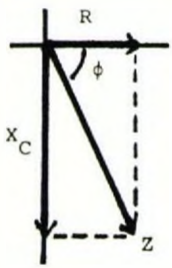
** 11.2 **

Septiembre 1989 - obligatoria - 2ª opción - problema 2

Se conecta un generador de corriente alterna de fuerza electromotriz máxima de 20 V, en serie con un condensador de 20×10^{-6} F y una resistencia de 80 Ω. Hallar: a)El factor de potencia. b) El valor eficaz de la corriente



La reactancia capacitativa del circuito es la del condensador, $X_C = \frac{1}{C \cdot \omega}$, y la resistencia ,R, la de la "resistencia de 80Ω". Si consideramos que la frecuencia de la corriente es la usual de 50H_z , $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 100 \cdot \pi$ y



$$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot \pi} = 159\ \Omega$$

Representando X_C y R en un diagrama fasorial, obtenemos para la impedancia, Z;

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{80^2 + 159^2} = 178\ \Omega$$

a) El factor de potencia, $\cos\phi$, es

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{80}{178} = 0,45$$

El factor de potencia es 0,45

b) El valor máximo de la la intensidad que circula por el circuito es;

$$I_m = \frac{\varepsilon}{Z} = \frac{20}{178} = 0,112$$

por lo que la intensidad eficaz vale;

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{0,112}{\sqrt{2}} = 0,080 \text{ A} \quad \text{ó} \quad 80 \text{ mA}$$

El valor eficaz de la corriente es 80 mA

PRUEBAS POR ORDEN CRONOLOGICO

Debido a la nueva programación del C.O.U., en las convocatorias del año 1989 hay dos pruebas diferentes según que la Física sea una asignatura OBLIGATORIA u OPTATIVA, aunque el programa sea el mismo.

JULIO 1981 - 1ª TANDA

XXXXXX **Ejercicio 1**

A) TEMA: "El campo magnético".

B) PROBLEMA: Estudiando experimentalmente el movimiento armónico simple de una partícula de 250 g de masa, elegimos el origen de tiempo en el instante en que la misma pasa por el punto de equilibrio y de elongación positiva a negativa y hacemos las siguientes medidas:

a) con un cronómetro medimos el tiempo que tarda en describir - 100 oscilaciones completas, y resulta ser de un minuto 20 segundos.

b) con un dinamómetro, que no perturba el movimiento, encontramos que el valor máximo de la fuerza que produce el mismo es de 25 newtons.

Determínense A, ω y ψ_0 en la ecuación del movimiento escrita de la forma:

$$x = A \cos(\omega t + \psi_0).$$ ** 1.1 **

Ejercicio 2

A) TEMA: Potencial electrostático; energía potencial de una carga en un campo electrostático.

B) PROBLEMA: Un fusil pesa 6 kg y dispara proyectiles de 7 mm de calibre y de 10 g de peso a 300 m/s. La longitud del tubo del cañón es de 50 cm. Calcular:

1) La velocidad de retroceso del fusil.
2) La presión de los gases de la pólvora.
3) El alcance máximo del fusil.

** 1.5 **

JULIO 1981 - 2ª TANDA

Ejercicio 1

A) TEMA: ¿Pueden cortarse dos lineas de fuerza de un campo eléctrico? ¿Y dos superficies equipotenciales?. Justifique la respuesta.

B) PROBLEMA: Un móvil sigue una trayectoria horizontal merced a una fuerza horizontal y dirigida siempre en la dirección de su velocidad. La potencia es constante e igual a 1 watio y la masa de 2 kilogramos. Calcular la ecuación de su movimiento cuando se empieza a contar el tiempo en el momento de iniciarse aquél. Calcular la velocidad y la aceleración a los 144 m de recorrido y el tiempo que se invierte en este trayecto.

** 1.14 **

Ejercicio 2

A) TEMA: Momento cinético de rotación; teorema de conservación.

B) PROBLEMA: Se lanza un electrón con una velocidad de $10^7 ms^{-1}$ en dirección perpendicular al campo creado entre dos placas paralelas separadas 1 cm, de longitud 2 cm y con una diferencia de potencial de 100 V entre ellas.

a) Hallar su desviación transversal y su velocidad transversal cuando emerge de las placas.

b) Si se coloca una pantalla perpendicular a 0,5 m a la derecha del extremo de las placas ¿a qué posición sobre la pantalla llega el electrón?

** 5.10 **

Ejercicio 1

A) TEMA: Analógias y diferencias entre el campo gravitatorio y el eléctrico, y entre el magnético y el eléctrico.

B) PROBLEMA: Dos cilindros de igual radio, pero cuyas masas son de 5 y 10 Kg respectivamente, se dejan caer simultáneamente rodando, sin deslizamiento, a lo largo de un plano inclinado 30º, desde una altura de 1 m sobre la horizontal. Se desea saber:

a) Cuál llega a la base con mayor energía y cuanto vale.

b) Cuál llega antes. ** 2.7 **

Ejercicio 2

A) TEMA: Conservación de la energía mecánica.

B) PROBLEMA: El desplazamiento debido a una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda tensa, viene dado por:
$y = 0,25 \cos(0,05t - 0,2x)$ m. (t en segundos y x en metros)

a) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda a lo largo de la cuerda?

b) ¿Cuánto vale la velocidad del punto de la cuerda x=2,5m en el instante t=10 segundos?.

** 3.2 **

SEPTIEMBRE 1981 - 2ª TANDA.

Universidad de Cádiz FISICA

Ejercicio 1

A) TEMA: El campo eléctrico, teorema de Gauss.

B) PROBLEMA: Una onda de 10m. de amplitud se propaga de izquierda a derecha y su periodo es de 12 segundos. Supuesta de tipo sinusoidal, hallar la elongación en el origen cuando el tiempo es 1 segundo, contado a partir de la iniciación del movimiento, desde la posición de equilibrio. En ese mismo instante, la elongación es nula en un punto que dista 4 cm. del origen hacia la derecha. Hallar la longitud de onda correspondiente.

** 3.1 **

Ejercicio 2

A) TEMA: Ondas armónicas; velocidad de propagación.

B) PROBLEMA: Un hombre de 80 Kg. se halla de pie en el interior de un ascensor. ¿Qué fuerza ejerce el suelo cuando el ascensor está: a) en reposo, b) acelerando y c) moviéndose hacia arriba con celeridad constante?

** 1.12 **

JULIO 1982 - 1ª TANDA

El alumno elegirá <u>uno</u> de los dos ejercicios siguientes:

Ejercicio 1º

TEMA: ¿Qué es preciso para que en un circuito aparezca una corriente inducida?. Leyes de Faraday y de Lenz.

PROBLEMA: Dos ondas de ecuaciones:

$$U_1 = 6\ \mathrm{sen}(1500t - 250x)$$

$$U_2 = 6\ \mathrm{sen}(1500t + 250x)$$

interfieren. Hallar:

a) La ecuación de las ondas estacionarias resultantes.

b) Amplitud en los nodos.

c) Distancia entre dos vientres próximos.

** 3,3 **

Ejercicio 2º

TEMA: Ley de Ohm generalizada.

PROBLEMA: De cada extremo de una cuerda que pasa por la garganta de una polea de 0,2 cm de radio, con su eje horizontal, cuelgan dos cuerpos de 3 y 7 kg respectivamente. El momento de inercia de la polea respecto del eje de giro es de 0,04 $Kg.m^2$. Calcúlese:

a) La aceleración lineal del movimiento del sistema.

b) El momento angular total del sistema respecto al eje de la polea cuando la velocidad de desplazamiento de los cuerpos es de 5 $m.s^{-1}$

** 2,4 **

JULIO 1982 - 2ª TANDA

Universidad de Cádiz   FISICA

El alumno deberá elegir uno de estos dos ejercicios:

Ejercicio 1º

TEMA: Principio de conservación de la energía mecánica.

PROBLEMA: ¿Cuál es la inducción magnética en el centro de una bobina circular, plana, de 100 espiras, de radio 152 cm. que conduce una corriente de 6,28 A? Indicar con auxilio de un esquema el sentido de este campo. Permeabilidad del vacio

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} J \cdot s^2 \cdot C^{-2} \cdot m^{-1}$

** 8.1 **

Ejercicio 2º

TEMA: Capacidad de un conductor; condensadores

PROBLEMA: Dada la ecuación de movimiento de un punto:

$$\vec{r} = \{(a \cos\omega t)\vec{i} + (b \cos\omega t)\vec{j} + ct\,\vec{k}\}$$

en donde a, b, c y ω son constantes e $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ son los vectores unitarios en las direcciones positivas de los ejes cartesianos X, Y, Z, respectivamente. Se pide:

a) ¿Es el movimimiento uniforme?

b) Describir la trayectoria del móvil.

** 1.1 **

SEPTIEMBRE 1982

El alumno elegirá uno de los dos ejercicios siguientes:

Ejercicio 1º

TEMA: Ondas sinusoidales; ecuación del movimiento ondulatorio.

PROBLEMA: Un paracaidista tiene una masa de 80 kg y todo el equipo, incluido el paracaidas, 50 Kg más. Cae desde una gran altura y el último tramo del recorrido hasta llegar al suelo lo recorre con velocidad constante. La aceleración de la gravedad en el lugar de la caida es de 9,78 m/s^2. ¿Cuál es el valor de la fuerza ascensional, en newtons, que actúa sobre el paracaidista y su equipo al llegar al suelo? ¿Qué tipo de movimiento es el de caida? Razónese la respuesta.

** 1.3 **

Ejercicio 2º

TEMA: Trabajo y energía cinética de rotación.

PROBLEMA: Calcular la resistencia que hay que montarle en serie a un aparato eléctrico de 25V, 125W para que funcione normalmente al conectarlo a una red de 110V ¿Qué tanto por ciento de la energía tomada de la red se aprovecha en este caso?.

** 10.1 **

JULIO 1983 - 1ª TANDA

El alumno deberá elegir uno de los ejercicios siguientes:

Ejercicio 1

TEMA: Inducción mútua. Autoinducción.

PROBLEMA: ¿A qué profundidad dentro de la Tierra hay que descender para que un cuerpo pese lo mismo que a H metros sobre su superficie?

** 4.4 **

Ejercicio 2

TEMA: Momento lineal de un partícula; impulso y cantidad de movimiento.

PROBLEMA: Un condensador de 10μF. se carga a un potencial de 100V. y otro de 20μF a 200V. Si se conectan ambos condensadores en paralelo ¿Cuál será la diferencia de potencial entre las placas? ¿Cuál será la carga de cada condensador?.

** 7.3 **

JULIO 1983 - 2ª TANDA

El alumno deberá realizar uno de los ejercicios siguientes:

Ejercicio 1

TEMA: Ley de Faraday-Lenz.

PROBLEMA: Un volante, cuyo momento de inercia es I = 63,6 $Kg.m^2$, gira con una velocidad angular constante w = 31,4 rad/s. C lcular el momento M, bajo cuya acción el volante se detiene al cabo de t = 20 s.

** 2.1 **

Ejercicio 2

TEMA: Energía potencial de una partícula; teorema de conservación de la energía mecánica.

PROBLEMA: Hallar la fuerza que actúa sobre una carga de 2C., si esta se situa a la distancia de 2 m. de la superficie de una esfera cargada de 0,2 m. de radio y con una densidad superficial de carga de 2.10^{-9} C/m^2.

** 5.7 **

SEPTIEMBRE 1983

UNIVERSIDAD DE CADIZ FISICA IX-2

El alumno deberá escoger uno de los ejercicios siguientes:

Ejercicio 1

TEMA: Concepto de campo magnético; definición.

PROBLEMA: Un disco gira alrededor de un eje vertical a 30 r.p.m. Sobre este disco y a 20 cm de distancia del eje de rotación se encuentra una partícula ¿Qué valor deberá de tener el coeficiente de rozamiento entre la partícula y el disco para que esta no se deslice, por el disco, en sentido radial? (Se supone que no existe deslizamiento tangencial)

** 2.3 **

Ejercicio 2

TEMA: Trabajo de las fuerzas de rozamiento; disipación de la energía mecánica.

PROBLEMA: ¿Cuanto valdrá el radio de la orbita circular de un electrón de 10^3 eV de energia, al desplazarse en un plano perpendicular a un campo magnético de 1 T.?

** 9.3 **

JUNIO 1984 - 1ª TANDA

Universidad de Cádiz

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE CADIZ

DENOMINACION ASIGNATURA: FISICA

El alumno deberá escoger uno de los ejercicios siguientes:

Ejercicio 1

TEMA: Fuerza magnética sobre una carga en movimiento; fuerza de Lorentz

PROBLEMA: Teniendo en cuenta que dos masas de 1 Kg, situadas a la distancia de 1 m se atraen con una fuerza de $6,7.10^{-11}$ N. Calcular la densidad media de la Tierra (R_T = 6370 Km)

** 4.2 **

Ejercicio 2

TEMA: Campos de fuerza conservativos

PROBLEMA: Se dispone de tres bombillas de 100 V, y de 10, 50 y 200 W, respectivamente ¿Qué es lo que ocurre si montadas en serie se conectan a una red de 300 V?

** 10.2 **

SEPTIEMBRE 1984

Universidad de Cádiz

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE CADIZ

DENOMINACION ASIGNATURA: FISICA

El alumno deberá escoger uno de los ejercicios siguientes:

Ejercicio 1

TEMA: Fuerza magnética entre dos conductores paralelos rectilíneos e indefinidos; definición de Amperio

PROBLEMA: Un proyectil estalla, dividiéndose en tres fragmentos iguales, cuando se encuentra en el punto más alto de su trayectoria y lleva una velocidad v. Suponiendo que uno de los fragmentos sale despedido horizontalmente hacia atrás, con una velocidad v/2 , y que, los otros dos salen hacia adelante formándo ángulos de $+60^{\circ}$ y -60°, con la horizontal
1º Calcular la velocidad de estos dos últimos fragmentos
2º ¿En qué orden llegarán a tierra? Justifique la respuesta

** 1.16 **

Ejercicio 2

TEMA: Momento angular de una particula; teorema de conservación

PROBLEMA: Una barra metálica, de 1 m de longitud, cae, a partir del reposo, manteniéndose siempre horizontal y orientada de Este a Oeste. ¿Cual es la diferencia de potencial entre sus extremos después de que haya caido 10 m?. La componente horizontal del campo magnético terrestre es de $0,17.10^{-4}$ Tesla .

** 9.2 **

JUNIO 1984 - 2ª TANDA

Universidad de Cádiz

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE CADIZ

DENOMINACION ASIGNATURA: FISICA

El alumno deberá escoger uno de los ejercicios siguientes:

Ejercicio 1

TEMA: Conceptos de campo y potencial electrostáticos

PROBLEMA: Por un plano inclinado, se abandonan simultáneamente una esfera y un cilindro de igual masa e igual radio. Supuestas idénticas las condiciones iniciales ¿Cual llegará antes al final del plano?

Supuesto el plano de longitud L, calcular el tiempo que tardarán el cilindro y la esfera en recorrerlo

** 2.6 **

Ejercicio 2

TEMA: Principios fundamentales de la dinámica

PROBLEMA: A través de un solenoide de 1000 vueltas, pasa un flujo magnético de 10^{-3}Wb. Si el flujo se reduce en 10^{-3}s a 10^{-4}Wb ¿Cual será la fuerza electromotriz que se induce?

** 10.4 **

1985

FISICA

OPCION A

PROBLEMA. Una partícula de 2 Kg de masa se mueve bajo la influencia de una sola fuerza conservativa que disminuye su velocidad de 20 a 10 m/s
a) Determinar la variación de energía cinética, de energía potencial y la variación de energía mecánica total de la partícula.
b) Si la energía potencial original de la partícula era de 100 J (cuando se mueve a 20 m/s), determinar la energía potencial y la energía total cuando la velocidad es de 10 m/s.

** 1.11**

CUESTIONES.

1ª) Ley de Ampere del campo magnético
2ª) Potencial gravitatorio
3ª) Ley de Ohm; intensidad de corriente

OPCION B

PROBLEMA. Por un conductor rectilíneo e indefinido circula una corriente de 20 A Un electrón está a 1 cm del centro del conductor y se mueve con una velocidad de $5 \cdot 10^6$ m/s. Hallar la fuerza debida al campo magnético que actúa sobre el electrón, cuando este se mueve:
a) alejándose del conductor en dirección perpendicular
b) paralelo al conductor en el sentido de la corriente
c) perpendicular al conductor y tangente a una circunferencia concéntrica con él.

** 9.1 **

CUESTIONES

1ª) Campo electrostático
2ª) Trabajo de las fuerzas de rozamiento; disipación de la energía mecánica para el caso de una partícula
3ª) Ley de Faraday Lenz

-El alumno deberá realizar solo una opción de las dos propuestas

Universidad de Cádiz

1985

F I S I C A

OPCION B

PROBLEMA. ¿A que distancia de la Tierra debe situarse un satélite artificial para que su periodo sea igual al periodo de rotación de la Tierra sobre su eje? ¿Por qué debe situarse dicho satélite sobre el ecuador si se desea que permanezca siempre sobre un mismo punto de la Tierra?

** 4.5 **

CUESTIONES

1ª) Momento lineal de un sistema de partículas; teorema de conservación

2ª) Carga eléctrica; propiedades

3ª) Fuerza magnética entre dos conductores rectilineos e indefinidos.

OPCION B

PROBLEMA. Un protón penetra con velocidad v_o en una región donde existe un campo B ($\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{v}_o$), determinar:

a) El radio, R, de la trayectoria seguida por la partícula

b) El periodo del movimiento

c) La variación de la energía cinética del protón cuando es acelerado por una diferencia de potencial V.

** 9.4 **

CUESTIONES.

1ª) Momento angular de un sólido en rotación; momento de inercia

2ª) Condensadores; capacidad

3ª) Concepto de campo magnético

-El alumno deberá realizar sólo una opción de las dos propuestas

1985

Universidad de Cádiz

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

F I S I C A

OPCION A

PROBLEMA.- Un alambre forma un ángulo de 30° con un campo magnético uniforme de 0,02 T .La longitud del alambre es de 10 cm y por él pasa una corriente de 5 A ¿Cuál es el valor de la fuerza resultante sobre el alambre? ¿En qué posición debe colocarse el alambre para que dicha fuerza sea mínima? ¿Y nula?

CUESTIONES.- ** 9,7 **

1ª) Principios fundamentales de la dinámica de una partícula

2ª) Campo electrostático

3ª) Ley de Biot-Savart

OPCION B

PROBLEMA.- ¿A qué altura sobre el suelo hay que colocar una masa de 12 Kg para que tenga la misma energía potencial que otra masa de 1000 Tm colocada a 10 m sobre el suelo?. Radio de la Tierra: 6000 Km

(NOTA: Téngase en cuenta que la gravedad es función de la distancia al centro de la Tierra y que, por tanto, cuando están involucradas grandes diferencias dealtura, la gravedad no puede considerarse constante)

CUESTIONES.- ** 4,3 **

1ª) Movimiento de una carga puntual situada en el interior de un campo magnético uniforme

2ª) Propiedades de los conductores

3ª) Teorema de conservación del momento angular para un sólido rígido

* El alumno deberá realizar solo una de las dos opciones propuestas.

JUNIO 1986 - 1ª TANDA

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

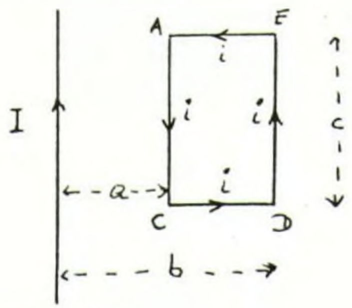
F I S I C A

Universidad de Cádiz

Rectorado

OPCION A.

PROBLEMA.- En la figura se muestra un alambre indefinido por el que circula una corriente I, así como una espira rectangular atravesada por una intensidad i. Los lados mayores de la espira son paralelos al conductor indefinido. Calcular:



a) La fuerza debida al campo magnético creado por el conductor indefinido, que actúa sobre el segmento AC.

b) La fuerza debida al campo magnético creado por el conductor indefinido, que actúa sobre el segmento AE.

** 9,9 **

CUESTIONES.-

1.- Teorema de conservación del momento angular, para un sólido rígido.

2.- Flujo del campo gravitatorio.

3.- Ley de Coulomb; campo electrostático.

OPCION B.

PROBLEMA.- Dos cuerpos de 2 y 4 Kg. están situados inicialmente en los puntos (0,0)m. y (4,3)m. respectivamente, encontrándose en reposo. Se aplica al primero de ellos una fuerza de $-12\vec{i}$ N. y al segundo una fuerza de $18\vec{j}$ N. Determinar:

a) La posición inicial del centro de masas del sistema.

b) La aceleración del centro de masas del sistema.

c) Las ecuaciones que describen la trayectoria del centro de masas, en función del tiempo.

** 1,15 **

CUESTIONES.-

1.- Energía potencial de una partícula de masa m en un campo gravitatorio

2.- Conductores electrícos; propiedades.

3.- Concepto de campo magnético; definición.

JUNIO 1986 - 2ª TANDA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

F I S I C A

OPCION A

PROBLEMA.- Sobre un cuerpo de 10Kg. actúa una fuerza dada por:

$$\vec{F} = (10 + 2\,t)\,\vec{i}\ \text{N.} \qquad (t \text{ en s.})$$

a) Determinar los cambios en la cantidad de movimiento y velocidad del cuerpo cuando transcurran 4 s., así como el impulso recibido.

b) ¿Durante cuánto tiempo debería actuar la fuerza mencionada sobre el cuerpo para que el impulso recibido por este sea de 200 N.s ?

Responder ambas cuestiones para el caso en que el cuerpo esté inicialmente en reposo y para el caso en que su velocidad inicial sea $-6\,\vec{j}\ \text{ms}^{-1}$.

CUESTIONES.- ** 1.4 **

1.- Masa inercial y masa gravitatoria.

2.- Campo electrostático; ley de Coulomb.

3.- Flujo del campo magnético; ley de Faraday-Lenz.

OPCION B

PROBLEMA.- Se tienen dos esferas huecas y concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$). Sobre cada una de ellas hay una carga Q_1 y Q_2 respectivamente, distribuidas uniformemente. Calculense los campos eléctricos:

a) Para puntos, r, interiores a ambas esferas ($r < R_1 < R_2$)

b) Para puntos, r, situados entre ambas esferas ($R_1 < r < R_2$)

c) Para puntos, r, situados fuera de ambas esferas ($R_1 < R_2 < r$)

CUESTIONES.- ** 5.6 **

1.- Energía potencial; teorema de conservación de la energía mecánica.

2.- Fuerzas centrales.

3.- Movimiento de una carga situada en el interior de un campo magnético.

SEPTIEMBRE 1986 - 1ª TANDA

F I S I C A

OPCION A.

PROBLEMA.- Un solenoide de 200 espiras de 2 cm^2 de sección y de 10 cm de longitud. Calcular:

a) El coeficiente de autoinducción.

b) La Fuerza electromotriz inducida cuando la corriente que lo recorre aumenta de 2 a 5A. en 0,2 s.

c) La fuerza electromotriz inducida cuando una corriente de 3A. se anula e 0,6 s.

CUESTIONES.-

1.- Momento angular de un sólido en rotación.

2.- Potencial electrostático.

3.- Campo gravitatorio; propiedades.

OPCION B.

PROBLEMA.- Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo de 20 Kg. con un velocidad de 50 ms^{-1}. Calcular:

a) Los valores iniciales de sus energías cinética, potencial y mecánica.

b) Su energía cinética y potencial después de transcurrir 3 s. de su lanz miento.

c) Su energía cinética y potencial cuando se encuentra a 100 m. de altura

d) La altura del cuerpo cuando su energía cinética se reduce al 80% de su valor inicial.

CUESTIONES.-

1.- Fuerza magnética sobre una carga en movimiento; fuerza de Lorentz.

2.- Ley de la gravitación universal.

3.- Carga eléctrica; propiedades.

F I S I C A

OPCION A.

PROBLEMA.- Un disco homogéneo de 25 Kg. y 1 m. de diámetro, puede girar a rededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro. Se aplica una fuerza tangencial a su borde, y el disco pasa del reposo a gir a 90 rpm en 10 s., calcular el valor de la fuerza tangencial aplicada y l energía cinética del disco cuando gira a 90 rpm.

** 2.2 **

CUESTIONES.-

1.- Potencial gravitatorio.
2.- Flujo del campo eléctrico.
3.- Fuerza magnética entre dos conductores rectilíneos e indefinidos.

OPCION B.

PROBLEMA.- Dos placas metálicas muy grandes están separadas una distancia de 1 cm. y se mantienen a una diferencia de potencial de 100 V.

a) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico uniforme en la región situa da entre las placas?.
b) ¿Que trabajo se requiere para llevar una partícula con una carga de + 6,0 μC, desde la placa de potencial mas alto hasta la otra placa?.

** 5.8 **

CUESTIONES.-

1.- Principios fundamentales de la dinámica.
2.- Fuerzas centrales.
3.- Ley de Faraday-Lenz.

Universidad de Cádiz

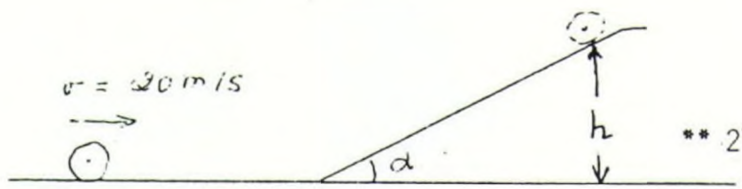
Rectorado

JUNIO 1987 - 1ª TANDA

FISICA

OPCION A.-

PROBLEMA: Como se muestra en la figura, una esfera sólida y uniforme de 1Kg, ru sobre una superficie horizontal a 20 m/s. Después rueda hacia arriba sobreun pl inclinado, como se muestra. Si las pérdidas debidas al rozamiento son despreciab ¿Cuál será el valor de h en el lugar donde se detiene la esfera?¿Cuál es la ener cinética de la bola antes de iniciar la subida por el plano?. (Dato: Momento de cia de la esfera, respecto a un eje que pasa por su centro= $(2/5)MR^2$).



** 2.8 **

CUESTIONES:

1.- Principios fundamentales de la dinámica.

2.- Teorema de conservación del momento angular.

3.- Carga eléctrica; propiedades.

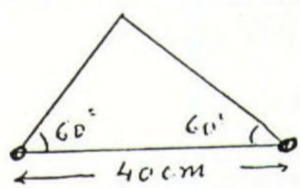
4.- Flujo del campo eléctrico.

5.- Ley de Biot-Savart.

OPCION B.-

PROBLEMA: En la figura se presenta la situación de dos bolas, de tamaño desprec idénticas, cada una de masa 0.1 g, llevan cargas idénticas y están suspendidas dos cuerdas de igual longitud. En equilibrio, la posición que guardan es la que muestra. Encuéntrese la carga de cada bola.

** 5.3 **



CUESTIONES:

1.- Momento lineal de una partícula; impulso y cantidad de movimiento.

2.- Trabajo y energía cinética.

3.- Campo gravitatorio; propiedades.

4.- Potencial electrostático.

5.- Circulación del campo magnético estacionario; ley de Ampere.

NOTA: El alumno elegirá una de las dos opciones (A ó B). Dentro de la opción seleccionada solverá el problema correspondiente y contestará a tres y solamente tres de las cinc tiones propuestas.

Universidad de Cádiz

Rectorado

FISICA

CION A.-

PROBLEMA: Partículas ($m= 6.68 \times 10^{-27}$ Kg , $q = + 2e$) se aceleran desde el reposo a través de una caida de potencial de 1KV. Después entran en un campo magnético B=0.2T, perpendicular a la dirección de su movimiento. Calcúlese el radio de su trayectoria.

** 9.5 **

CUESTIONES:

1.- Momento lineal de una partícula; teorema de conservación.

2.- Trabajo de las fuerzas de rozamiento; disipación de la energía mecánica.

3.- Ley de la gravitación universal.

4.- Potencial electrostático.

5.- Concepto de campo magnético; definición.

PCION B.-

PROBLEMA: Un bloque de madera de 2Kg descansa sobre el tablero de una mesa larga. Se dispara una bala de 5g contra el bloque, horizontalmente y con una velocidad de 150 m/s, quedando unidos. El bloque se desliza 3m sobre la mesa, después del choque, y se detiene. (a) Encuentre la velocidad del bloque precisamente después del impacto. (b) Encuentre la fuerza de fricción entre la mesa y el bloque.

** 1.7 **

CUESTIONES:

1.- Sistema de partículas; centro de masas.

2.- Momento angular de un sólido rígido en rotación; momento de inercia.

3.- Campo electrostático.

4.- Conductores: propiedades.

5.- Ley de Faraday-Lenz.

TA: El alumno elegirá una de las dos opciones (A ó B). Dentro de la opción seleccionada, resolverá el problema correspondiente y contestará a **tres y solamente tres** de las cinco cuestiones propuestas.

Universidad de Cádiz
Rectorado

SEPTIEMBRE 1987

FISICA

OPCION A.-

PROBLEMA: Un ascensor parte del reposo con una aceleración constante hacia arrib
Se mueve 2m en los primeros 0.06s. Dentro del ascensor, un pasajero está sosteni
do un paquete de 3Kg, por medio de una cuerda vertical. ¿Cuál es la tensión en l
cuerda durante el proceso de aceleración?

** 1.13 **

CUESTIONES:

1.- Energía potencial; teorema de conservación de la energía mecánica.

2.- Principios fundamentales de la dinámica.

3.- Ley de Coulomb.

4.- Condensadores.

5.- Ley de Biot-Savart.

OPCION B.-

PROBLEMA: Considérense los tres alambres rectos, largos y paralelos mostrados en
figura. Encuéntrese la fuerza que experimentan 25cm de longitud del alambre C.

** 9.8 **

CUESTIONES:

1.- Leyes fundamentales de la rotación de un sólido.

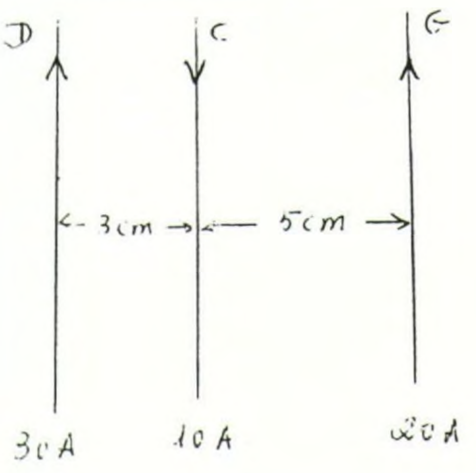
2.- Campos de fuerzas conservativos; concepto de energía potencial.

3.- Potencial gravitatorio.

4.- Campo electrostático.

5.- Circulación del campo magnético estacionario; ley de Ampere.

NOTA: El alumno elegirá una de las dos opciones (A ó B). Dentro de la opción seleccionada,
solverá el problema correspondiente y contestará a <u>tres y solamente tres</u> de las cinco c
tiones propuestas.



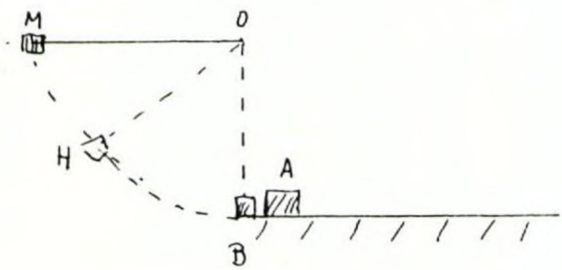
JUNIO 1988 - 1ª TANDA

NOTA: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas (Opción A u Opción B). Una vez elegida la Opción a desarrollar, contestará a tres y solamente tres de las cinco cuestiones propuestas, así como resolverá el problema correspondiente.

F I S I C A

OPCION A

PROBLEMA. Un cuerpo de 20 Kg. de masa gira alrededor de O, siendo MO = 1,5 m.; se deja caer hasta la posición B, siendo BO vertical y BOM = 90°. Al llegar a B, se produce un choque perfectamente elástico con otro cuerpo A, de masa 25 Kg, situado, en reposo, sobre un plano horizontal y sin rozamiento. Como consecuencia del choque, el cuerpo M rebota hasta H. Determinar: a) El trabajo, W, realizado por M en su caida. b) La velocidad, u, que adquiere A. c) La energía cinética, E_c, que pierde M en el choque. d) La altura vertical, h, entre los puntos B y H.



** 2.11 **

CUESTIONES.

1ª) Teorema angular de un sólido en rotación; momento de inercia.

2°) Trabajo de las fuerzas de rozamiento; disipación de la energía mecánica.

3°) Carga eléctrica; propiedades.

4°) Condensadores eléctricos.

5°) Inducción y autoinducción.

OPCION B

PROBLEMA. Un protón se acelera desde el reposo, mediante una diferencia de potencial de 6000 V. Posteriormente se introduce en una región donde existe un campo magnético uniforme de dirección perpendicular a su velocidad. a) Calcular el radio de la órbita que describe el protón, si el campo magnético es de 4. 10^{-3} T. b) Determinar la frecuencia de oscilación del protón. ($q_p = 1.6 \times 10^{-19}$ C ; $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ Kg)

** 9.6 **

CUESTIONES.

1ª) Momento lineal de una partícula; impulso y cantidad de movimiento.

2°) Sistema de partículas; centro de masas.

3°) Concepto de trabajo; potencia.

4°) Carga eléctrica; propiedades.

5°) Ley de Faraday-Lenz.

NOTA: El alumno elegirá una de las dos Opciones propuestas (Opción A u Opción B). Una vez elegida la Opción a desarrollar, contestará a tres y solamente tres de las cinco cuestiones propuestas, así como resolverá el problema correspondiente.

FISICA

OPCION A

PROBLEMA. Una barra de masa m y 1 m. de longitud, está suspendida por su extremo superior por un eje perpendicular que le permite girar en un plano vertical, como si fuese un péndulo. Una bala de igual masa m, se lanza con una velocidad de 10 m/s contra el extremo libre de la barra, donde se empotra. Calcular: a) La velocidad angular de la barra inmediatamente después del choque. b) El ángulo máximo a que se eleva la barra.

** 2.12 **

CUESTIONES.

1ª) Fuerzas interiores y exteriores de un sistema de partículas; movimiento del centro de masas.

2°) Trabajo y energía cinética.

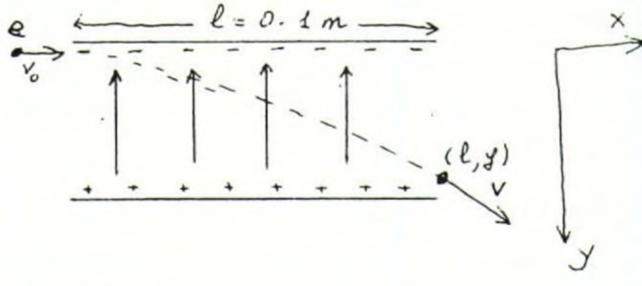
3°) Campo electrostático.

4°) Condensadores.

5°) Ley de Faraday-Lenz

OPCION B

PROBLEMA. Un electrón ($q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C; $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg.), con una velocidad inicial $v_o = 3 \times 10^6$ m/s, como se indica en la figura, entra en una región en la que hay un campo eléctrico uniforme $E = 2 \times 10^3$N/C. a) ¿Cuál es el valor de la aceleración que adquiere el electrón al ser introducido en el interior de dicho campo?. b) Determinar el tiempo que tarda el electrón en atravesar la región de campo eléctrico uniforme. c) ¿A qué distancia, y, emergerá el electrón fuera del campo eléctrico uniforme? d) ¿Cuál es la velocidad del electrón cuando emerge del campo eléctrico?



CUESTIONES.

** 5.9 **

1ª) Principios fundamentales de la dinámica

2°) Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de una partícula

3°) Trabajo de las fuerzas de rozamiento; disipación de la energía mecánica.

4°) Potencial electrostático

5°) Concepto de campo magnético; definición.

NOTA: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas (Opción A u Opción B). Una vez elegida la Opción a desarroll contestará a tres y solamente tres de las cinco cuestiones propuestas, así como resolverá el problema correspondiente.

FISICA

OPCION A.

PROBLEMA. Una varilla homogénea de longitud L= 1 m. y masa M = 1 Kg., está sujeta por un extremo y en posición horizontal. Si se deja caer girando alrededor del extremo fijo, en un plano vertical, calcular:

- La aceleración angular con que inicia el movimiento.
- La velocidad lineal del extremo movil al pasar por la vertical.
- La resistencia que ha de hacer en ese instante,(cuando pasa por la vertical), el soporte fijo.

(DATO: Momento de inercia de la varilla respecto al eje de giro $I = \frac{1}{3} M L^2$ Kg.m^2)

** 2.13 **

CUESTIONES.

1ª) Trabajo y energía cinética.

2°) Teorema de conservación de la cantidad de movimiento para una partícula.

3°) Carga eléctrica; propiedades.

4°) Concepto de campo magnético; definición.

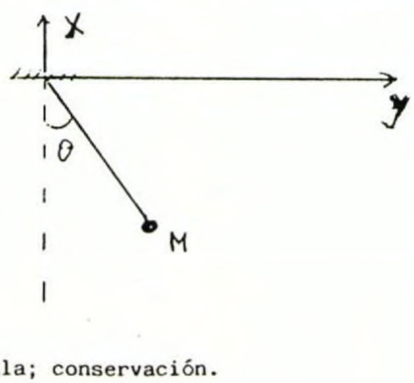
5°) Potencial electrostático.

OPCION B

PROBLEMA. Una carga puntual de M = 1 g. está suspendida de un hilo de masa despreciable e inerte a los efectos del campo electríco. El péndulo se introduce en una región en la que existe un campo eléctrico uniforme. Cuando el valor del campo es:

$$\vec{E} = (3 \vec{i} + 5 \vec{j}).\ 10^5 \text{ N/C}$$

el péndulo se mantiene en equilibrio formando un ángulo con la vertical de $\theta = 37°$.
Calcular: a) el valor de la carga eléctrica,
b) la tensión del hilo.



** 5.14 **

CUESTIONES.

1ª) Teorema del momento angular de una partícula; conservación.

2°) Concepto de trabajo; potencia.

3°) Ley de gravitación universal

4°) Campo electrostático.

5°) Fuerza magnética sobre una carga en movimiento.

Universidad de Cádiz
Rectorado

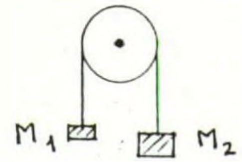
El alumno deberá elegir **una sola** Opción, **la A** o **la**
Dentro de la Opción escogida, se resolverán **los dos problemas** y se contestará a **dos** (y sólo dos) de las tres cuestiones **propuestas**.

FISICA

OPCION A

PROBLEMAS

1.- En la Fig. se observa una polea de M = 20 Kg y R = 0.2 m, que tiene arrollada una cuerda de masa despreciable, de la que penden las masas M_1 = 5 Kg y M_2 =10 Kg. Sabiendo que el momento de inercia de la polea respecto a su eje de giro es $MR^2/2$, determinar las aceleraciones con que se mueven las masas. ** 2.5 **



2.- Un condensador y una lámpara eléctrica están unidos en serie con una fuente de corriente alterna de 440 V de tensión y 50 Hz de frecuencia. ¿Qué capacidad debe tener el condensador para que por la lámpara pase una intensidad de 0.5 A y la caida de tensión en la misma sea de 110 V?.

** 11.1 **

CUESTIONES

1.- Ecuación fundamental de la dinámica de rotación; conservación del momento angular.
2.- Campo eléctrico.
3.- Dualidad onda-partícula; hipótesis de de Broglie.

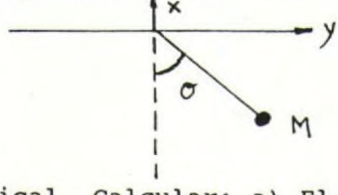
OPCION B

PROBLEMAS

1.- Una vasija que estaba en reposo, explota rompiéndose en tres fragmentos. Dos de ellos, que tienen igual masa, vuelan perpendicularmente entre sí y con la misma velocidad de 30 m/s. El tercer fragmento tiene tres veces la masa de cada uno de los otros dos. ¿Cuál es la dirección y el módulo de su velocidad inmediatamente después de la explosión?.

** 1.17 **

2.- Una carga puntual de M=1 g, está suspendida de un hilo de masa despreciable e inerte a los efectos del campo eléctrico. El péndulo se introduce en una región en la que existe un campo eléctrico uniforme. Cuando el valor del campo eléctrico es $\vec{E} = (3\ \vec{i} + 5\ \vec{j}) \times 10^5$ N/C, el péndulo se mantiene en equilibrio formando un ángulo θ=37° con la vertical. Calcular: a) El valor de la carga eléctrica. b) La tensión del hilo.



CUESTIONES

** 5.4 **

1.- Flujo del campo gravitatorio.
2.- Fuerza magnética sobre una carga en movimiento.
3.- Campos de fuerzas conservativos; energía potencial.

Universidad de Cádiz

Rectorado

JUNIO 1989 - 1ª TANDA - OPTATIVA

El alumno deberá elegir **una sola** Opción, **la** A o **la** B. Dentro de la Opción escogida, se resolverán **los dos problemas** y se contestará a **dos** (y sólo dos) de las tres cuestiones **propuestas**.

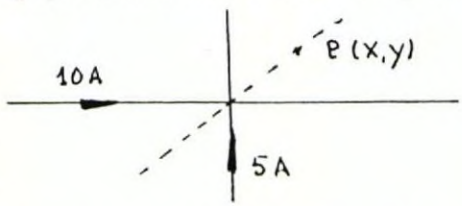
F I S I C A

OPCION A

PROBLEMAS

1.- Una esfera de 0.1 Kg y 5×10^{-2} m de radio, rueda sin deslizar sobre un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal. Determinar cuanto tiempo tardará en recorrer 1 m sobre el plano inclinado, partiendo del reposo. (Momento de inercia de una esfera respecto a un eje que pasa por su centro: $2MR^2/5$). **2,9**

2.- Dos hilos conductores, rectos e indefinidos, se cruzan perpendicularmente, encontrándose muy próximos entre sí. Si por uno de ellos circula una corriente de 10 A, y por el otro una de 5 A, determinar el campo magnético en un punto P, de la bisectriz del ángulo que determinan ambos hilos.



** 8,3 **

CUESTIONES

1.- Energía gravitatoria; potencial del campo gravitatorio.
2.- Ecuación del movimiento ondulatorio (Ondas sinusoidales).
3.- Conductores eléctricos; propiedades.

OPCION B

PROBLEMAS

1.- Un motor de automóvil produce una energía de 2×10^6 J por Km. Se diseña un coche capaz de utilizar la energía almacenada en un volante contenido en un recipiente al vacío. Si la masa del volante es de 100 Kg y gira con una velocidad de 400 r.p.s., calcular el menor valor del radio del volante para el cuál el coche puede desplazarse 300 Km, sin necesidad de recargar el volante. (Suponer que el volante es un cilindro, cuyo momento de inercia respecto a su eje es $MR^2/2$).

** 2,10 **

2.- Calcular la fuerza eléctrica resultante, que actúa sobre una carga de 1 C, colocada en el centro de un cuadrado de lado **b** m, que tiene cargas **q, 2q, -4q** y **2q** (en C), colocadas en este orden sobre los cuatro vértices.

** 5,2 **

CUESTIONES

1.- Principios fundamentales de la Mecánica; leyes de Newton.
2.- Ley de Faraday-Lenz.
3.- Fisión y fusión nuclear.

Universidad de Cádiz

Rectorado

JUNIO 1989 - 2ª TANDA - OBLIGATORIA

El alumno deberá elegir **una sola** Opción, **la A** o **la** Dentro de la Opción escogida, se resolverán **los dos problemas** y se contestará a **dos** (y sólo dos) de las tres cuestiones **propuestas.**

F I S I C A

OPCION A

PROBLEMAS

1.- Un bloque de madera de M=0.490 Kg, está en reposo sobre un plano horizontal. Sea 0.25 el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano. Se dispara una bala de m=0.01 Kg contra el bloque, alcanzándolo con la velocidad horizontal de 500 m/s , quedándose incrustada en él. Determinar: a) La energía cinética antes e inmediatamente después del choque. b) Distancia que recorrerá el bloque antes de detenerse.

** 1.8 **

2.- Por un conductor cilíndrico de 0.5 cm de radio, circula una corriente de 100 A, uniformemente distribuida en toda su sección recta. Hallar el campo magnético: a) en un punto situado a 0.1 cm del eje del conductor. b) En un punto situado en el exterior del conductor, a 0.2 cm de la superficie del mismo.

** 8.2 **

CUESTIONES

1.- Energía cinética de rotación.
2.- Ecuación del movimiento ondulatorio (ondas sinusoidales).
3.- Flujo del campo magnético.

OPCION B

PROBLEMAS

1.- Calcular el punto de la línea imaginaria que une la Tierra y la Luna, en el que el valor del campo gravitatorio es nulo.
DATOS: Distancia Tierra-Luna = 3.84×10^{8} m.
Masa de la Luna = 0.0123 x Masa de la Tierra

** 4.1 **

2.- Dos planos indefinidos y paralelos entre sí, se encuentran separados una distancia **d**. Calcular el campo eléctrico en las tres regiones del espacio que determinan ambos planos, suponiendo que éstos tienen una densidad superficial de carga eléctrica σ C/m .

** 7.1 **

CUESTIONES

1.- Energía de un sistema de partículas; conservación de la energía.
2.- Conductores eléctricos; propiedades.
3.- Fisión y fusión nuclear.

Universidad de Cádiz
Rectorado

El alumno deberá elegir una sola Opción, la A o la B. Dentro de la Opción escogida, se resolverán los dos **problemas** y se contestará a **dos** (y sólo dos) de las tres cuestiones **propuestas**.

FISICA

OPCION A

PROBLEMAS

1.- Una varilla homogénea de longitud L=1 m y masa M=1 Kg, está sujeta por un extremo, y en posición horizontal. Si se deja caer girando alrededor del extremo fijo, en un plano vertical, calcular: a) La aceleración angular con que inicia el movimiento. b) La velocidad lineal del extremo al pasar por la vertical. (Momento de inercia de una varilla homogénea **respecto a un eje que pasa por su centro de masa:** $ML^2/12$). NOTA : Tomar el origen de ángulos en la horizontal.

** 2.14 **

2.- Cuando se coloca una carga de prueba $q = 2 \times 10^{-9}$ C en el origen de un sistema de referencia, experimenta la acción de una fuerza electrotática de $8 \times 10^{-4}\,\vec{j}$ N. Calcular el campo eléctrico en el origen.

Suponiendo el campo eléctrico uniforme, determinar el valor de la fuerza ejercida por el mismo sobre una carga de -4×10^{-9} C, situada en el punto (-3,1) m.

** 5.1 **

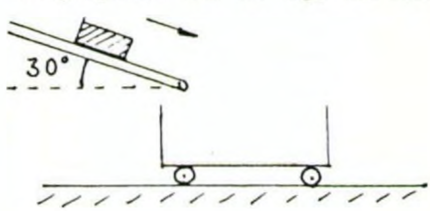
CUESTIONES

1.- Trabajo y energía; conservación.
2.- Leyes de Keppler.
3.- Ley de Ampere para el campo magnético.

OPCION B

PROBLEMAS

1.- Un paquete de 10 Kg, se descarga de una cinta transportadora con una velocidad de 3 m/s y cae en una vagoneta de 25 Kg. Sabiendo que la vagoneta está inicialmente en reposo y que puede rodar libremente, determinar su velocidad final.



** 1.9 **

2.- Cuando la corriente que circula por una bobina determinada es de 5 A, y está aumentando a razón de 10 A/s, la diferencia de potencial en los extremos de la misma es de 140 V. Cuando la corriente vale 5 A y está disminuyendo a razón de 10 A/s, la diferencia de potencial es de 60 V. Hallar la resistencia y la autoinducción de la bobina.

** 10.3 **

CUESTIONES

1.- Movimiento ondulatorio.
2.- Condensadores.
3.- Campo magnético.

Universidad de Cádiz

Rectorado

SEPTIEMBRE 1989 - OBLIGATORIA

El alumno deberá elegir una sola Opción, la A o la
Dentro de la Opción escogida, se resolverán los dos problemas y se contestará a dos (y sólo dos) de las tres cuestiones propuestas.

F I S I C A

OPCION A

PROBLEMAS

1.- Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una cuerda de 1.4 m de longitud. El tiempo que tarda un punto en pasar de su desplazamiento máximo al desplazamiento nulo es de 0.17 s. Determinar: a) La frecuencia. b) La velocidad de la onda. c) La longitud de onda.

** 3.4 **

2.- Dos cargas positivas q, están situadas en el eje x de un sistema de referencia, en los puntos x = +d y x = -d, respectivamente. Hallar el potencial electrostático V, en función de x, para puntos situados sobre el eje x, en :

a) $x < -d$
b) $-d < x < +d$
c) $x > +d$

** 5.5 **

CUESTIONES

1.- Principios fundamentales de la Mecánica.
2.- Ley de la gravitación universal.
3.- Fuerza sobre una carga en movimiento; fuerza de Lorentz.

OPCION B

1.- Una varilla uniforme, que cuelga verticalmente de un pivote, tiene una longitud de 1 m y 2.5 Kg de masa. Se golpea la base de la varilla con una fuerza horizontal de 100 N durante 1/50 s. a)Hallar el momento angular adquirido por la varilla. b) ¿Llegará la varilla a la posición vertical, con el extremo libre sobre el pivote?
(Momento de inercia de la varilla respecto a un eje que pasa por su centro de masas $ML^2/12$).

** 2.15 **

2.- Se conecta un generador de corriente alterna de fuerza electromotriz máxima 20 V, en serie con un condensador de 20×10^{-6} F y una resistencia de 80 Ω. Hallar: a) El factor de potencia. b) El valor eficaz de la corriente.

** 11.2 **

CUESTIONES

1.- Movimiento relativo; fuerzas de inercia.
2.- Flujo del campo eléctrico; teorema de Gauss.
3.- Dualidad onda-partícula; hipótesis de de Broglie.

Universidad de Cádiz

Rectorado

SEPTIEMBRE 1989 - OPTATIVA

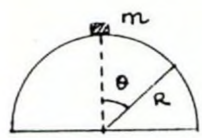
El alumno deberá elegir una sola Opción, la A o la B. Dentro de la Opción escogida, se resolverán los dos problemas y se contestará a dos (y sólo dos) de las tres cuestiones propuestas.

FISICA

OPCION A

PROBLEMAS

1.- Una masa puntual **m** parte del reposo y resbala hacia abajo, sobre la superficie, sin rozamiento, de una esfera sólida de radio **R**, como se muestra en la fig. Determinar: a) La variación de la energía potencial de **m** en función del ángulo . b) La energía cinética en función del ángulo . c) El ángulo en el que se separa la masa **m** de la superficie de la esfera.



** 1.10 **

2.- Dados dos plano infinitos, que se cortan perpendicularmente, cargados electricamente con densidades de carga σ_1 y σ_2 C/m , respectivamente, calcular el campo eléctrico en un punto P no contenido en ninguno de los planos.

** 7.2 **

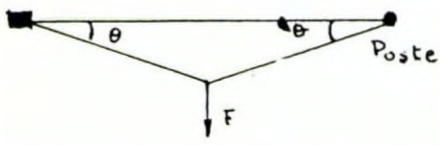
CUESTIONES

1.- Movimiento relativo (traslación), fuerzas de inercia.
2.- Energía potencial electrostática para una carga puntual.
3.- Inducción mútua. Autoinducción.

OPCION B

PROBLEMAS

1.- Una vagoneta, en su via, se encuentra parada. Para moverla se dispone de una cuerda larga y fuerte, que se ata por sus extremos al vehículo y a un poste, tirándose lateralmente de ella, como se indica en la fig. Determinar la tensión en la cuerda y la aceleración de la vagoneta cuando $\theta = 3°$, F=400 N y M de la vagoneta 250 Kg.



** 1.6 **

2.- Un protón se acelera desde el reposo, mediante una diferencia de potencial de 6000 V. Posteriormente se introduce en una región donde existe un campo magnético uniforme de dirección perpendicular a su velocidad. Calcular el radio de la órbita que describe el protón, si el campo es $B= 4 \times 10^{-3}$ T. Determinar la frecuencia de oscilación del protón. (DATOS: $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ Kg.)

** 9.6 **

CUESTIONES

1.- Ley de la gravitación universal.
2.- Conductores eléctricos; propiedades.
3.- Fisión y fusión nuclear.

UNIVERSIDAD DE CADIZ

INSTITUTO DE CIENCIAS
DE LA EDUCACION

CURSO DE ORIENTACION UNIVERSITARIA
AÑO ACADEMICO 1988-89

PROGRAMACION
DE
FISICA

COORDINADOR : D. Rafael Jiménez Garay

DIRECCION : Facultad de Ciencias. Pol.Rio S. Pedro. Pto.Real

TELEFONO : 83-09-66

CURSO DE ORIENTACION UNIVERSITARIA

FISICA

TEMAS

1.- DINAMICA DE TRASLACION .- Principios fundamentales de la Dinámica. Movimiento relativo (Traslación), fuerzas de inercia y principio de equivalencia. Sistema de particulas, centros de masa. Movimiento del centro de masa y conservación del movimiento lineal. TRABAJO energía de un sistema de particulas; conservación de la energia. Aplicación a colisiones.

2.- DINAMICA DE ROTACION.- Momento angular; de una particula, de un sistema y de un sólido rigido. Momento de inercia, radio de giro y teorema de Steiner. Momento de una fuerza. Ecuación fundamental de la dinámica de rotación, conservación del momento angular. Energia cinética de rotación. Movimiento simultáneo de traslación y rotación (Rodar sin deslizar).

3.- MOVIMIENTO ONDULATORIO .- Generalidades del movimiento ondulatorio. Ecuación del movimiento ondulatorio (Ondas sinusoidales). Transmisión de una onda;interferencias;onda estacionarias; difracción, reflexión y refracción; polarización. Efecto Doppler (Comentar).

4.- CAMPO GRAVITATORIO.- Ley de la gravitación universal. Leyes de keppler y orbitas en un campo gravitatorio. Intensidad del campo gravitatorio, lineas de fuerza. Flujo del campo gravitatorio. Teorema de Gauss, Aplicaciones. Energia gravitatoria, potencial del campo gravitatorio, superficie equipotenciales.

5.- CAMPO ELECTRICO (I).- Ley de Coulomb, carga electrica. Intensidad del campo electrostático. Flujo del campo electrostático, teorema de Gauss, aplicaciones. Potencial electróstático. Energia potencial electrostático para una sola carga puntual.

6.- CAMPOS.- Concepto de campo; campos escalares y vectoriales, su representación. Campos de fuerzas conservativos y energia potencial.

7.- CAMPO ELECTRICO (II).- Conductores; propiedades. Capacidad de un conductor. Condensadores, asociación y energia almacenada (Sin dieléctricos).

8.- CAMPO MAGNETICO.- Concepto de campo magnético; definición (Ley de Ampere-Laplace). Ley de Biot-Savart. Movimientos de una carga puntual situada en el interior de un campo magnético. Jey de Ampere.

9.- FUERZAS MAGNETICAS.- Fuerza sobre una carga en movimiento; fuerza de Lorentz. Fuerza magnética entre dos conductores rectilíneos e indefinidos; definición del amperio.

10.- INTRODUCCION AL ESTUDIO DE C.A..- Flujo del campo magnético. Ley de Faraday-Lenz. Inducción mútua. Autoinducción.

11.- CORRIENTE ALTERNA.- Fuerza electromotriz alterna. Circuitos de corriente alterna: con R; con L; con C; con R-C; con R-L. circuito serie L-C. Circuito serie R-L-C; Potencia.

12.- INTRODUCCION A LA FISICA CUANTICA.- Naturaleza de la luz; teorias clásicas. Dificultades de la teoria clásica; radiación térmica y efecto fotoeléctrico; fotones. Dualidad onda partícula; hipótesis de Broglie. Cuantización de magnitudes físicas. Laser. Principio de incertidumbre. Necesidades de una nueva mecánica.

13.- FISICA NUCLEAR.- Radiactividad natural. Núcleo atómico. Interacción fuerte. Estabilidad nuclear. Reacciones nucleares. Fisión y fusión nucleares. Reactores nuecleares. Efectos de la radiación. Aplicaciones a los radioisotopos.

CUESTIONES ORDENADAS TEMATICAMENTE

Cada opción de las pruebas de los años 1981 al 1984 incluye un tema y cada opción de las pruebas de los años 1985 al 1989, incluye de tres a cinco cuestiones, no existiendo una diferencia apreciable entre los temas y las cuestiones por lo que en la siguiente relación no distinguiremos entre ellos.

Los temas y cuestiones se ordenan siguiendo el programa para la Física del C.O.U. iniciado durante el curso 1988-89. El número de cuestiones y temas que han salido de cada tema de este programa, se indica entre paréntesis al final del título de este.

Las cuestiones y temas se agrupan por títulos afines, indicando al principio de cada grupo el número total de veces que han salido las cuestiones y temas incluidos en este grupo. Si hay más de un enunciado, se indica al final de éste y entre paréntesis las veces que este enunciado ha salido.

Si una cuestión o tema se ha incluido tambien en otro tema se indica por (tema nº).

Un asterisco al final del título del tema del programa, indica que este tema no fué materia de las pruebas en los años inmediatamente anteriores al 1989. Un asterisco al final del título de una cuestión significa que dicha cuestión salió al menos una vez en las pruebas del año 1989.

1. DINÁMICA DE TRASLACIÓN (32).

(7) Principios fundamentales de la dinámica (4). Principios fundamentales de la dinámica de una partícula (1). Principios fundamentales de la Mecánica; leyes de Newton * (1). Principios fundamentales de la Mecánica * (1).

(1) Masa inercial y masa gravitatoria (tema 4)

(3) Momento lineal de una partícula; impulso y cantidad de movimiento.

(4) Momento lineal de una partícula; teorema de conservación (1). Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de una partícula (2). Momento lineal de un sistema de partículas; Teorema de conservación (1).

(2) Movimiento relativo; fuerzas de inercia * (1). Movimiento relativo (traslación); fuerzas de inercia * (1)

(3) Sistema de partículas; centro de masas (2). Fuerzas interiores y exteriores de un sistema de partículas; movimiento del centro de masas.

(2) Concepto de trabajo; potencia

(3) Trabajo y energía cinética

(7) Conservación de la energía mecánica (1). Principio de conservación de la energía mecánica (1). Energía potencial de una partícula; teorema de conservación de la energía mecánica (1) (tema 6). Energía potencial; teorema de conservación de la energía mecánica (2) (tema 6). Energía de un sistema de partículas; conservación de la energía * (1). Trabajo y energía; conservación * (1)

2. DINÁMICA DE ROTACION (14).

(2) Leyes fundamentales de la rotación de un sólido (1). Ecuación fundamental de la dinámica de rotación; conservación del momento angular * (1).

(6) Teorema de conservación del momento angular (1). Teorema del momento angular de una partícula; conservación (1). Momento cinético de rotación; teorema de conservación (1). Momento angular de una partícula; teorema de conservación (1). Teorema de conservación del momento angular para un sólido rígido (2).

(4) Momento angular de un sólido en rotación; momento de inercia (2). Momento angular de un sólido rígido en rotación; momento de inercia (1). Momento angular de un sólido en rotación (1).

(2) Energía cinética de rotación * (1). Trabajo y energía ciné tica de rotación (1).

3. MOVIMIENTO ONDULATORIO * (5)

(1) Movimiento ondulatorio *

(4) Ecuación del movimiento ondulatorio (ondas sinusoidales) * (2). Ondas sinusoidales; ecuación del movimiento ondulatorio (1). Ondas armónicas;velocidad de propagación (1).

4. CAMPO GRAVITATORIO (17)

(5) Ley de la gravitación universal *

(2) Campo gravitatorio; propiedades

(1) Analogias y diferencias entre el campo gravitatorio y el eléctrico, y entre el magnético y el eléctrico (temas 5 y 8).

(1) Leyes de Keppler *

(2) Flujo del campo gravitatorio *

(5) Energía gravitatoria; potencial del campo gravitatorio * (1). Potencial gravitatorio (3). Energía potencial de una partí cula de masa m en un campo gravitatorio.(1).

(1) Masa inercial y gravitatoria (tema 1)

5. CAMPO ELÉCTRICO (I) (30)

(10) Ley de Coulomb (1). Ley de Coulomb; campo electrostático (1). Campo electrostático; ley de Coulomb (1). Campo eléc trico * (1). Campo electrostático (6).

(6) Carga eléctrica; propiedades

(1) Analogías y diferencias entre el campo gravitatorio y el eléctrico, y entre el magnético y el eléctrico (temas 4 y 8).

(1) ¿Pueden cortarse dos líneas de fuerza de un campo eléctrico?. ¿Y dos superficies equipotenciales?. Justifique la respuesta.

(2) Flujo del campo eléctrico

(1) Flujo del campo eléctrico; teorema de Gauss *

(1) El campo eléctrico, Teorema de Gauss

(8) Energía potencial electrostática para una carga puntual * (1) Potencial electrostático; energía potencial de una carga en un campo electrostático (1). Conceptos de campo y potencial electrostáticos (1). Potencial electrostático (5).

6. CAMPOS (13)

(2) Fuerzas centrales

(3) Campos de fuerzas conservativos (1). Campos de fuerzas conservativos; energía potencial * (1). Campos de fuerzas conservativos; concepto de energía potencial (1).

(3) Energía potencial de una partícula; teorema de conservación de la energía mecánica(1) (tema 1). Energía potencial; teorema de conservación de la energía mecánica (2) (tema 1).

(5) Trabajo de las fuerzas de rozamiento; disipación de la energía mecánica(4). Trabajo de las fuerzas de rozamiento; disipación de la energía mecánica para el caso de una partícula (1).

7. CAMPO ELÉCTRICO (II) (12)

(6) Conductores; propiedades (1). Conductores eléctricos; propiedades * (4). Propiedades de los conductores (1).

(6) Condensadores * (3). Condensadores eléctricos (1). Condensadores; capacidad (1). Capacidad de un conductor, condensadores (1)

8. CAMPO MAGNÉTICO (19)

(9) Concepto de campo magnético; definición (6). Campo magnético * (2). Concepto de campo magnético (1)

(1) Analogías y diferencias entre el campo gravitatorio y el eléctrico, y entre el magnético y el eléctrico (temas 4 y 5).

(3) Ley de Biot-Savart

(2) Movimiento de una carga puntual situada en el interior de un campo magnético uniforme (1). Movimiento de una carga puntual situada en el interior de un campo magnético (1).

(4) Ley de Ampere para el campo magnético * (2). Circulación del campo magnético estacionario; ley de Ampere (2).

9. FUERZAS MAGNÉTICAS (8)

(5) Fuerza magnética sobre una carga en movimiento (2). Fuerza sobre una carga en movimiento; fuerza de Lorentz * (3)

(3) Fuerza magnética entre dos conductores rectilíneos e indefinidos (2). Fuerza magnética entre dos conductores rectilíneos e indefinidos; definición de Amperio (1).

10. INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA CORRIENTE ALTERNA (13)

(10) Flujo del campo magnético; ley de Faraday-Lenz (1). Flujo del campo magnético * (1). Ley de Faraday-Lenz * (7). ¿Qué es preciso para que en un circuito aparezca una corriente inducida?. Leyes de Faraday y de Lenz (1).

(3) Inducción mutua. Autoinducción * (2). Inducción y autoinducción (1).

11. CORRIENTE ALTERNA *

12. INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA CUÁNTICA * (2)

(2) Dualidad onda-partícula; hipótesis de de Broglie *

13. FÍSICA NUCLEAR * (3)

(3) Fisión y fusión nuclear *

SIGILLVM · VNIVERSITATIS · GADITANAE